Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Wirkung von $PSL_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{CP}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$\rho\colon (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

mit der Konvention $(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \infty) \mapsto \frac{a}{c}$ und $(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, -\frac{d}{c}) \mapsto \infty$.

a) Zeigen Sie, dass dies wirklich eine Wirkung ist.

b) Berechnen Sie die Orbiten dieser Wirkung.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - cb = 1$ und $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}$. Es seien $w_1, \dots, w_4$ definiert durch

$$w_j := \frac{az_j + b}{cz_j + d}.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$d(w_1, w_2; w_3, w_4) = d(z_1, z_2; z_3, z_4).$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass es eine Isometrie f von $\mathbb{H}^2$ gibt, die z_1 auf i abbildet.

b) Zeigen Sie, dass die Isometrie $f_\theta\colon z \mapsto \frac{z\cos\theta + \sin\theta}{-z\sin\theta + \cos\theta}$ den Punkt i fixiert.

c) Folgern Sie, dass es eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$ gibt, die z_1 und z_2 auf die imaginäre Halbachse abbildet.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass der hyperbolische Abstand zweier Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ gegeben ist durch:

$$d(z_1, z_2) = \log\left(\frac{|z_1 - \overline{z_2}| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \overline{z_2}| - |z_1 - z_2|}\right)$$

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den blauen Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!