Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Wirkung von $PSL_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{CP}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$\rho\colon (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

mit der Konvention $(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \infty) \mapsto \frac{a}{c}$ und $(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, -\frac{d}{c}) \mapsto \infty$.

a) Zeigen Sie, dass dies wirklich eine Wirkung ist.

b) Berechnen Sie die Orbiten dieser Wirkung.

Lösung 1

a) Man rechnet leicht nach, dass $\rho(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z) = z$ und $\rho(A \cdot B, z) = \rho(A, \rho(B, z))$ und damit ist es eine Wirkung.

b) Laut Vorlesung ist die Wirkung transitiv auf $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{CP}^1$. Es sei $\overline{\mathbb{H}}^2 := \{x \in \mathbb{C} \colon \overline{x} \in \mathbb{H}^2\}$ genau die an der reellen Achse gespiegelte Hyperbolische Ebene. Für $x, y \in \overline{\mathbb{H}}^2$ ist also $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{H}^2$ und es gibt eine Isometrie f_A für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, mit $f_A(\overline{x}) = \overline{y}$. Dann ist

$$f_A(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \overline{\left(\frac{a\overline{x}+b}{c\overline{x}+d}\right)} = \overline{f_A(\overline{x})} = \overline{\overline{y}} = y$$

und damit ist die Wirkung transitiv auf dem unteren Halbraum und fixiert ihn. Außerdem kann man sich leicht überlegen, dass die Wirkung transitiv auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{CP}^1$ ist und somit sind die Orbiten genau gegeben durch $\mathbb{H}^2$, $\overline{\mathbb{H}}^2$ und $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - cb = 1$ und $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}$. Es seien $w_1, \dots, w_4$ definiert durch

$$w_j := \frac{az_j + b}{cz_j + d}.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$d(w_1, w_2; w_3, w_4) = d(z_1, z_2; z_3, z_4).$$

Lösung 2
Es gilt

$$\begin{aligned}(az_i+b)(cz_j+d)-(az_j+b)(cz_i+d) &= acz_iz_j+bcz_j+adz_i+bd-acz_jz_i-bcz_i-adz_j-bd \\ &= z_i-z_j \qquad (1)\end{aligned}$$

und damit folgt:

$$d(w_1,w_2;w_3,w_4)=\frac{\frac{z_1-z_2}{cz_1-d}\Big/\frac{z_2-z_3}{cz_2-d}}{\frac{z_1-z_4}{cz_1-d}\Big/\frac{z_2-z_4}{cz_2-d}}=d(z_1,z_2;z_3,z_4)$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass es eine Isometrie f von $\mathbb{H}^2$ gibt, die z_1 auf i abbildet.

b) Zeigen Sie, dass die Isometrie $f_\theta\colon z \mapsto \frac{z\cos\theta+\sin\theta}{-z\sin\theta+\cos\theta}$ den Punkt i fixiert.

c) Folgern Sie, dass es eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$ gibt, die z_1 und z_2 auf die imaginäre Halbachse abbildet.

Lösung 3

a) Man wähle $f = f_A$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{Re}(z_1) \\ 0 & \operatorname{Im}(z_1)\end{pmatrix}$.

b) $\frac{i\cos\theta+\sin\theta}{-i\sin\theta+\cos\theta} = \frac{(i\cos\theta+\sin\theta)(i\sin\theta+\cos\theta)}{(-i\sin\theta+\cos\theta)(i\sin\theta+\cos\theta)} = i.$

c) Für $\theta = 0$ ist $f_\theta = \mathrm{id}$ und für $\theta = \pi/2$ ist

$$\operatorname{Re}(f_{\pi/2}(z_2)) = \operatorname{Re}(-\frac{1}{z_2}) = -\operatorname{Re}(\frac{\overline{z}_2}{\|z_2\|^2}) = -\frac{\operatorname{Re}(z_2)}{\|z_2\|^2}$$

hat also genau das umgekehrte Vorzeichen von $\operatorname{Re}(z_2)$. Also gibt es nach Zwischenwertsatz ein $\theta \in (0, \pi/2)$ sodass $\operatorname{Re}(f_\theta(z_2)) = 0$ und dann ist $f_\theta \circ f$ (f ist die Isometrie aus Teil a)) eine Isometrie, die z_1 und z_2 auf die Imaginäre Halbachse abbildet.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass der hyperbolische Abstand zweier Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ gegeben ist durch:

$$d(z_1,z_2) = \log\left(\frac{|z_1-\overline{z_2}|+|z_1-z_2|}{|z_1-\overline{z_2}|-|z_1-z_2|}\right)$$

Lösung 4

Schritt 1: Zeige, dass $\left(\frac{|z_1-\overline{z_2}|+|z_1-z_2|}{|z_1-\overline{z_2}|-|z_1-z_2|}\right) = \left(\frac{|f(z_1)-\overline{f(z_2)}|+|f(z_1)-f(z_2)|}{|f(z_1)-\overline{f(z_2)}|-|f(z_1)-f(z_2)|}\right)$ für f eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$. Dies ist ähnlich wie in Aufgabe 2 unter Benutzung der Darstellung $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Schritt 2: Man beweise die Formel für Zahlen auf der imaginären Halbebene, also $z_j = i \cdot x_j$ für $x_j > 0$, ohne Einschränkung $x_1 \geq x_2$. Es ergibt sich:

$$\log\left(\frac{|i(x_1+x_2)|+|i(x_1-x_2)|}{|i(x_1+x_2)|-|i(x_1-x_2)|}\right) = \log\left(\frac{(x_1+x_2)+(x_1-x_2)}{(x_1+x_2)-(x_1-x_2)}\right) = \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = d(ix_1, ix_2)$$

Schritt 3: Es seien z_1, z_2 beliebig und es sei f eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$, die diese Punkte auf die imaginäre Halbachse schickt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{|z_1-\overline{z_2}|+|z_1-z_2|}{|z_1-\overline{z_2}|-|z_1-z_2|}\right) &\overset{\text{Schritt 1}}{=} \log\left(\frac{|f(z_1)-f(\overline{z_2})|+|f(z_1)-f(z_2)|}{|f(z_1)-f(\overline{z_2})|-|f(z_1)-f(z_2)|}\right)\\ &\overset{\text{Schritt 2}}{=} d(f(z_1),f(z_2)) = d(z_1,z_2)\end{aligned}$$

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den blauen Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!