Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 14

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Erinnerung: eine Parametrisierung der Sphäre vom Radius a ist gegeben durch:

$$r(u,v) = a\sin(u)\sin(v)\cdot e_1 + a\cos(u)\sin(v)\cdot e_2 + a\cos(v)\cdot e_3.$$

a) Zeigen Sie, dass gilt: $r_u \times r_v = a^2\sin(v)^2\sin(u)\cdot e_1 + a^2\sin(v)^2\cos(u)\cdot e_2 + a^2\sin(v)\cos(v)\cdot e_3$ und $\|r_u \times r_v\| = a^2\sin(v)$.

b) Zeigen Sie, dass $r(u,v) = a\cdot n(u,v)$ gilt.

c) Weisen Sie nach, dass $\mathrm{I}(u,v) = a^2\sin(v)^2du^2 + a^2dv^2$ und $\mathrm{II}(u,v) = -a\sin(v)^2du^2 - adv^2$.

d) Berechnen Sie die zugehörige Gauß-Krümmung.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Erinnerung: eine Parametrisierung des Torus mit Radii $a \in \mathbb{R}$ und $b < a$ ist gegeben durch:

$$r(u,v) = (a + b\cos(u))(\cos(v)\cdot e_1 + \sin(v)\cdot e_2) + b\sin(u)\cdot e_3.$$

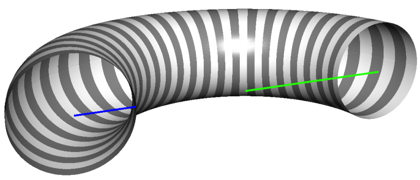

Abbildung 1: Die Parametrisierung des Torus: Die grüne Linie hat die Länge a und die blaue die Länge b.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $n(u,v) = \cos(u)\cos(v)\cdot e_1 - \cos(u)\sin(v)\cdot e_2 - \sin(u)\cdot e_3$.

b) Weisen Sie nach, dass $\mathrm{I}(u,v) = b^2du^2 + (a + b\cos(u))^2dv^2$ und $\mathrm{II}(u,v) = bdu^2 + (a + b\cos(u))\cos(u)dv^2$.

c) Berechnen Sie die Gauß-Krümmung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Betrachten Sie das Möbiusband gegeben durch folgende Parametrisierung:

$$r(u,v) = \cos(v)(1 + u\cos(\frac{v}{2})) \cdot e_1 + \sin(v)(1 + u\cos(\frac{v}{2})) \cdot e_2 + u\sin(\frac{v}{2}) \cdot e_3$$

für $v \in \mathbb{R}$ und $u \in [-1, 1]$. Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform.

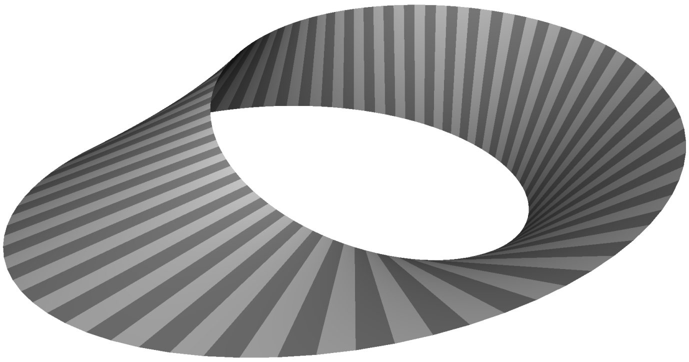

Abbildung 2: Das Möbiusband

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Rechnen Sie nach, dass die folgenden Formeln aus der Vorlesung gelten:

$$\|r_u \times r_v\|^2 = (r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}\Big(E(t)du^2 + 2F(t)dudv + G(t)dv^2\Big) = -\Big((r_u \cdot n_u)du^2 + (r_u \cdot n_v + r_v \cdot n_u)dudv + (r_v \cdot n_v)dv^2\Big)$$

$$-\Big((r_u \cdot n_u)du^2 + (r_u \cdot n_v + r_v \cdot n_u)dudv + (r_v \cdot n_v)dv^2\Big) = (r_{uu} \cdot n)du^2 + (r_{uv} \cdot n)dudv + (r_{vv} \cdot n)dv^2$$