Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 14

Anmerkung Dies ist eine Lösungsskizze für das 14. Übungsblatt. Falls sie Tipp-/Vorzeichenfehler finden, sagen Sie bitte Bescheid.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Erinnerung: eine Parametrisierung der Sphäre vom Radius $a > 0$ ist gegeben durch:

$$r(u, v) = a \sin(u) \sin(v) \cdot e_1 + a \cos(u) \sin(v) \cdot e_2 + a \cos(v) \cdot e_3.$$

a) Zeigen Sie, dass gilt: $r_u \times r_v = a^2 \sin(v)^2 \sin(u) \cdot e_1 - a^2 \sin(v)^2 \cos(u) \cdot e_2 + a^2 \sin(v) \cos(v) \cdot e_3$ und $\|r_u \times r_v\| = a^2 \sin(v)$.

b) Zeigen Sie, dass $r(u, v) = a \cdot n(u, v)$ gilt.

c) Weisen Sie nach, dass $\mathrm{I}(u, v) = a^2 \sin(v)^2 du^2 + a^2 dv^2$ und $\mathrm{I\!I}(u, v) = -a \sin(v)^2 du^2 - a dv^2$.

d) Berechnen Sie die zugehörige Gauß-Krümmung.

Lösung 1
Man rechne nach:

$$\begin{aligned}
r_u &= a \cos(u) \sin(v) e_1 - a \sin(u) \sin(v) e_2 \\
r_v &= a \sin(u) \cos(v) e_1 + a \cos(u) \cos(v) e_2 - a \sin(v) e_3 \\
r_u \cdot r_u &= a^2 \sin(v)^2 \qquad r_u \cdot r_v = 0 \qquad r_v \cdot r_v = a^2 \\
r_{uu} &= -a \sin(u) \sin(v) e_1 - a \cos(u) \sin(v) e_2 \\
r_{uv} &= a \cos(u \cos(v) e_1 - a \sin(u) \cos(v) e_2 \\
r_{vv} &= -a \sin(u) \sin(v) e_1 - a \cos(u) \sin(v) e_2 - a \cos(v) e_3
\end{aligned}$$

a) Ergibt sich durch Einsetzen des Obigen.

b) Mit den Rechnungen folgt: $n(u, v) = \sin(u) \sin(v) e_1 + \cos(u) \sin(v) e_2 + \cos(v)$ und man sieht direkt die Formel.

c) $\mathrm{I}(u, v) = a^2 \sin(v)^2 du^2 + a^2 dv^2$ folgt direkt und $\mathrm{I\!I}(u, v) = -a \sin(v)^2 du^2 - a dv^2$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
L &= r_{uu} \cdot n = -a \sin(v)^2 \\
M &= r_{uv} \cdot n = 0 \\
N &= r_{vv} \cdot n = -a
\end{aligned}$$

d) Es gilt:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{a^2 \sin(v)^2}{a^4 \sin(v)^2} = \frac{1}{a^2}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Erinnerung: eine Parametrisierung des Torus mit Radii $a \in \mathbb{R}$ und $b < a$ ist gegeben durch:

$$r(u,v) = (a + b\cos(u))(\cos(v) \cdot e_1 + \sin(v) \cdot e_2) + b\sin(u) \cdot e_3.$$

a) Zeigen Sie, dass gilt: $n(u,v) = -\cos(u)\cos(v) \cdot e_1 - \cos(u)\sin(v) \cdot e_2 - \sin(u) \cdot e_3$.

b) Weisen Sie nach, dass $\mathrm{I}(u,v) = b^2du^2 + (a + b\cos(u))^2dv^2$ und $\mathrm{II}(u,v) = bdu^2 + (a + b\cos(u))\cos(u)dv^2$.

c) Berechnen Sie die Gauß-Krümmung.

Lösung 2
Man rechne nach:

$$\begin{aligned}
r_u &= -b\sin(u)\cos(v)e_1 - b\sin(u)\sin(v)e_2 + b\cos(u)e_3 \\
r_v &= -(a + b\cos(u))\sin(v)e_1 + (a + b\cos(u))\cos(v)e_2 \\
r_u \times r_v &= -b\cos(u)(a + b\cos(u))\cos(v)e_1 - b\cos(u)(a + b\cos(u))\sin(v)e_2 - (a + b\cos(u))b\sin(u)e_3 \\
\|r_u \times r_v\|^2 &= b^2(a + b\cos(u))^2 \\
r_u \cdot r_u &= a^2\sin(v)^2 \qquad r_u \cdot r_v = 0 \qquad r_v \cdot r_v = a^2 \\
r_{uu} &= -b\cos(u)\cos(v)e_1 - b\cos(u)\sin(v)e_2 - b\sin(u)e_3 \\
r_{uv} &= b\sin(u)\sin(v)e_1 - b\sin(u)\cos(v)e_2 \\
r_{vv} &= -(a + b\cos(u))\cos(v)e_1 - (a + b\cos(u))\sin(v)e_2
\end{aligned}$$

a) Ergibt sich durch Einsetzen des Obigen.

b) Ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
L &= r_{uu} \cdot n = b \\
M &= r_{uv} \cdot n = 0 \\
N &= r_{vv} \cdot n = (a + b\cos(u))\cos(u)
\end{aligned}$$

c) Es gilt:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{b(a + b\cos(u))\cos(u)}{b^2(a + b\cos(u))^2} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\cos(u)}{a + b\cos(u)} \begin{cases} > 0 & \text{falls } u \in (2\pi \cdot k - \frac{\pi}{2}, 2\pi \cdot k + \frac{\pi}{2}) \\ = 0 & \text{falls } u = \pi \cdot k + \frac{\pi}{2} \\ < 0 & \text{falls } u \in (2\pi \cdot k + \frac{\pi}{2}, 2\pi \cdot k - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Man sieht, dass die Krümmung außen auf dem Torus positiv, innen negativ und auf den beiden Kreisen oben und unten konstant 0 ist (siehe Abbildung 1).

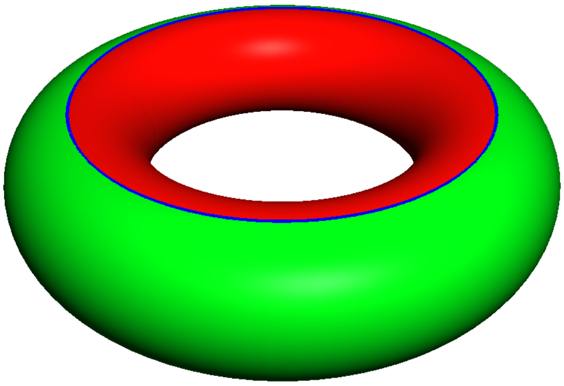

Abbildung 1: Die Gauß-Krümmung des Torus: Im grünen Bereich positiv, im roten negativ und auf den blauen Linien $\equiv 0$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Betrachten Sie das Möbiusband gegeben durch folgende Parametrisierung:

$$r(u, v) = \cos(v)(1 + u\cos(\frac{v}{2})) \cdot e_1 + \sin(v)(1 + u\cos(\frac{v}{2})) \cdot e_2 + u\sin(\frac{v}{2}) \cdot e_3$$

für $v \in \mathbb{R}$ und $u \in [-1, 1]$. Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform.

Lösung 3
Man rechne nach:

$$r_u = \cos(v)\cos(\frac{v}{2}) \cdot e_1 + \sin(v)\cos(\frac{v}{2}) \cdot e_2 + \sin(\frac{v}{2}) \cdot e_3$$

$$r_v = \begin{pmatrix} -\sin(v)(1 + u\cos(\frac{v}{2})) - \frac{1}{2}u\cos(v)\sin(\frac{v}{2}) \\ \cos(v)(1 + u\cos(\frac{v}{2})) - \frac{1}{2}u\sin(v)\sin(\frac{v}{2}) \\ \frac{1}{2}u\cos(\frac{v}{2}) \end{pmatrix}$$

$$r_u \cdot r_u = 1 \qquad r_u \cdot r_v = 0 \qquad r_v \cdot r_v = (1 + u\cos(\frac{v}{2}))^2 + \frac{1}{4}u^2$$

$$r_u \times r_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(v)u - \cos(v)\sin(\frac{v}{2})(1 + u\cos(\frac{v}{2})) \\ -\frac{1}{2}\cos(v)u - \sin(v)\sin(\frac{v}{2})(1 + u\cos(\frac{v}{2})) \\ \cos(\frac{v}{2})(1 + u\cos(\frac{v}{2})) \end{pmatrix}$$

$$\|r_u \times r_v\|^2 = \frac{1}{4}u^2 + (1 + u\cos(\frac{v}{2}))^2$$

$$
\begin{aligned}
r_{uu} &= 0 \\
r_{uv} &= \begin{pmatrix} -\sin(v)\cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{2}\cos(v)\sin(\frac{v}{2}) \\ \cos(v)\cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{2}\sin(v)\sin(\frac{v}{2}) \\ \frac{1}{2}\cos(\frac{v}{2}) \end{pmatrix} \\
r_{vv} &= \begin{pmatrix} -\cos(v)(1+u\cos(\frac{v}{2})) + u\sin(v)\sin(\frac{v}{2}) - \frac{1}{4}u\cos(v)\cos(\frac{v}{2}) \\ -\sin(v)(1+u\cos(\frac{v}{2})) - u\cos(v)\sin(\frac{v}{2}) - \frac{1}{4}u\sin(v)\cos(\frac{v}{2}) \\ -\frac{1}{4}u\sin(\frac{v}{2}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{uu}\cdot(r_u \times r_v) &= 0 \\
r_{uv}\cdot(r_u \times r_v) &= u\cos(\frac{v}{2}) + \frac{1}{2} \\
r_{vv}\cdot(r_u \times r_v) &= \sin(\frac{v}{2})\Big(\frac{1}{2}u^2 + (1+u\cos(\frac{v}{2}))^2\Big).
\end{aligned}
$$

Der Rest der Aufgabe besteht aus Einsetzen.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Rechnen Sie nach, dass die folgenden Formeln aus der Vorlesung gelten:

$$\|r_u \times r_v\|^2 = (r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)^2$$

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\Big(E(t)du^2 + 2F(t)dudv + G(t)dv^2\Big) = -\Big((r_u\cdot n_u)du^2 + (r_u\cdot n_v + r_v\cdot n_u)dudv + (r_v\cdot n_v)dv^2\Big)$$

$$-\Big((r_u\cdot n_u)du^2 + (r_u\cdot n_v + r_v\cdot n_u)dudv + (r_v\cdot n_v)dv^2\Big) = (r_{uu}\cdot n)du^2 + 2(r_{uv}\cdot n)dudv + (r_{vv}\cdot n)dv^2$$

Lösung 4
Wir schreiben $r_{u,i}$ und $r_{u,i}$ für die Komponenten von r_u und r_v.

$$
\begin{aligned}
\|r_u \times r_v\|^2 &= \| \begin{pmatrix} r_{u,2}r_{v,3} - r_{u,3}r_{v,2} \\ r_{u,3}r_{v,1} - r_{u,1}r_{v,3} \\ r_{u,1}r_{v,2} - r_{u,2}r_{v,1} \end{pmatrix} \|^2 \\
&= r_{u,2}^2 r_{v,3}^2 - 2r_{u,2}r_{v,2}r_{u,3}r_{v,3} + r_{u,3}^2 r_{v,2}^2 \\
&\quad + r_{u,3}^2 r_{v,1}^2 - 2r_{u,1}r_{v,1}r_{u,3}r_{v,3} + r_{u,1}^2 r_{v,3}^2 \\
&\quad + r_{u,1}^2 r_{v,2}^2 - 2r_{u,1}r_{v,1}r_{u,2}r_{v,2} + r_{u,2}^2 r_{v,1}^2 \\
&\quad + r_{u,1}^2 r_{v,1}^2 + r_{u,2}^2 r_{v,2}^2 + r_{u,3}^2 r_{v,3}^2 - (r_{u,1}^2 r_{v,1}^2 + r_{u,2}^2 r_{v,2}^2 + r_{u,3}^2 r_{v,3}^2) \\
&= (r_{u,1}^2 + r_{u,2}^2 + r_{u,3}^2)(r_{v,1}^2 + r_{v,2}^2 + r_{v,3}^2) \\
&\quad - (r_{u,1}r_{v,1} + r_{u,2}r_{v,2} + r_{u,3}r_{v,3})^2 \\
&= (r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)^2
\end{aligned}
$$

Erinnerung: $E(t), F(t), G(t)$ waren die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von $r^t(u,v) = R(u,v,t) = r(u,v) - t\cdot n(u,v)$. Die zweite Formel folgt direkt aus den folgenden Berechnungen.

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} E(t) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} (r_u^t \cdot r_u^t) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} (r_u - t(n_u)) \cdot (r_u - t(n_u)) = -2n_u \cdot r_u$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} F(t) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} (r_u^t \cdot r_v^t) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} (r_u - t(n_u)) \cdot (r_v - t(n_v)) = -n_u \cdot r_v + n_v \cdot r_u$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} G(t) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} (r_v^t \cdot r_v^t) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} (r_v - t(n_v)) \cdot (r_v - t(n_v)) = -2n_v \cdot r_v$$

Nun sind r_u und r_v senkrecht auf n und es gilt $n \cdot r_u = 0 = n \cdot r_v$. Damit ist auch $(n \cdot r_u)_u = 0 = (n \cdot r_u)_v = (n \cdot r_v)_v$ und die behauptete Formel folgt direkt aus:

$$-r_u \cdot n_u = r_{uu} \cdot n \qquad - r_v \cdot n_u = r_{uv} \cdot n = r_{vu} \cdot n = -r_u \cdot n_v \qquad - r_v \cdot n_v = r_{vv} \cdot n$$

Nicht zur Abgabe vorgesehen.