Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie:

a) $\mathring{A} = \bigcup_{U \subset A \text{ offen}} U$.

b) $\overline{A} = \bigcap_{A \subset V \text{ abgeschlossen}} V$.

c) $\mathring{A}$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.

d) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

Aufgabe 2
Es seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) Endliche Vereinigungen und beliebige Schnitte von abgeschlossenen Teilmengen sind abgeschlossen.

b) f ist genau dann stetig, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

c) f ist genau dann stetig, falls gilt: Für $x \in X$ und U eine Umgebung von $f(x)$ ist die Menge $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x. Also in anderen Worten: Falls Urbilder von Umgebungen wieder Umgebungen sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Betrachten Sie $(\mathbb{Z}, \mathcal{O})$ mit der Topologie gegeben wie folgt: $U \in \mathcal{O}$, falls $\mathbb{Z} \setminus U$ endlich oder ganz $\mathbb{Z}$ ist. Zeigen Sie:

a) Dies definiert eine Topologie.

b) Jede bijektive Selbstabbildung ist stetig und hat stetiges Inverses.

c) Es gibt eine nichtstetige Selbstabbildung.

Es sei weiter $\mathcal{O}^\delta$ die diskrete und $\mathcal{O}^\tau$ die triviale Topologie. Welche der folgenden Abbildungen sind stetig?

$$\mathrm{id}\colon (\mathbb{Z}, \mathcal{O}^\delta) \to (\mathbb{Z}, \mathcal{O}) \qquad \mathrm{id}\colon (\mathbb{Z}, \mathcal{O}^\tau) \to (\mathbb{Z}, \mathcal{O})$$
$$\mathrm{id}\colon (\mathbb{Z}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{Z}, \mathcal{O}^\delta) \qquad \mathrm{id}\colon (\mathbb{Z}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{Z}, \mathcal{O}^\tau)$$
$$\mathrm{id}\colon (\mathbb{Z}, \mathcal{O}^\delta) \to (\mathbb{Z}, \mathcal{O}^\tau) \qquad \mathrm{id}\colon (\mathbb{Z}, \mathcal{O}^\tau) \to (\mathbb{Z}, \mathcal{O}^\delta)$$

Beachten Sie: Auf der nächsten Seite ist noch eine Aufgabe!

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Wir, bzw. Sie geben in dieser Aufgabe einen Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlen. Dazu betrachten wir die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Topologie $\mathcal{O}$ gegeben wie folgt: Eine Menge U ist offen, falls U leer ist oder eine Vereinigung von Mengen der Form

$$S(a,b) := \{an+b | n \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z}+b$$

für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0$. Zeigen Sie:

a) Dies definiert eine Topologie.

b) Komplemente von endlichen Mengen sind nicht abgeschlossen.

c) Die Mengen $S(a,b)$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

d) $\mathbb{Z} \setminus \{-1,+1\} = \bigcup_{p \text{ Primzahl}} S(p,0)$.

Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die blauen Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!