Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ von topologischen Räumen heißt *Einbettung*, falls f injektiv und $f\colon X \to f(X)$ ein Homöomorphismus ist. Es seien nun $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetig. Zeigen Sie:

a) Sind f und g Einbettungen, so auch $g \circ f$.

b) Sind $g \circ f$ und g Einbettungen, so auch f.

c) Ist $X = Z$ und ist $g \circ f = \mathrm{id}_X$, so ist f eine Einbettung.

Geben Sie ein Beispiel für f und g an, bei dem $g \circ f$ und f Einbettungen sind, g aber nicht.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
In dieser Aufgabe betrachten wir die Quotiententopologie. Sei hierzu X ein topologischer Raum und $\pi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren auf Y folgende Topologie: Eine Teilmenge $U \subset Y$ ist offen, genau dann, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen ist. Diese Topologie heißt *Quotiententopologie* bezüglich π und π wird *Quotientenabbildung* genannt.

a) Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie die feinste Topologie auf Y, bezüglich der die Quotientenabbildung π stetig ist.

b) Eine Abbildung $f\colon Y \to Z$ ist genau dann stetig, falls $f \circ \pi\colon X \to Z$ stetig ist.

c) Es sei $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(d))$ gegeben. Bestimmen Sie die Quotiententopologie $\mathcal{O}(\pi)$ auf $\mathbb{R}$ für die Abbildung $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ gibt, sodass $\pi(U)$ nicht offen ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wir sagen (x_n) konvergiert gegen $x \in X$ falls für alle Umgebungen U von x fast alle Folgenglieder in U liegen, das heißt, es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

a) Zeigen Sie: Ist $f\colon X \to Y$ stetig, so konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x)$.

b) Geben Sie einen Raum X und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, sodass (x_n) zwei verschiedene Grenzwerte hat.

c) Geben Sie eine Funktion $f\colon X \to Y$ an, für die $f(x_n)$ gegen $f(x)$ konvergiert, aber f nicht stetig ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Für eine Wirkung $G \times X \to X$ bezeichne X/G die Menge der Orbiten. Falls X ein topologischer Raum ist, so ist X/G mit der Quotiententopologie ebenfalls ein topologischer Raum. Betrachten Sie nun die Wirkung $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z, x \mapsto x + z$. Zeigen Sie:

a) Die Quotientenabbildung $\pi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist offen, das heißt, dass Bilder offener Mengen offen sind.

b) Die Abbildung $f \colon \mathbb{R} \to S^1 = \{x \in \mathbb{C} \colon |x| = 1\}$, $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ induziert eine bijektive Abbildung $\overline{f} \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$.

c) Die Abbildung $\overline{f}$ ist stetig.

Man könnte jetzt elementar nachrechnen, dass $\overline{f}$ sogar ein Homöomorphismus ist. Dies ist allerdings aufwendig und nicht schön. Außerdem werden wir auf dem nächsten Übungszettel einen einfachen Beweis hierfür sehen.

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die blauen Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!