Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. X ist Hausdorffsch.
2. Die Diagonale $\Delta(X) := \{(x,x) \in X \times X\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$.
3. Für alle $x \in X$ ist $\{x\} = \bigcap_{\substack{U \text{ abg.} \\ \text{Umgebung von } x}} U$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Betrachten Sie die bijektive, stetige Abbildung $p\colon [0,1) \to S^1$ gegeben durch $p(t) := e^{2\pi i t}$. Zeigen Sie, dass p kein Homöomorphismus ist.

b) Geben Sie eine bijektive stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ an, sodass X kompakt und f *kein* Homöomorphismus ist.

Anmerkung: Man sieht, dass beide Voraussetzungen (X kompakt und Y Hausdorffsch) notwendig für die Richtigkeit von Aufgabe 3 d) sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es sei X ein kompakter und Y ein Hausdorff-Raum. Zeigen Sie:

a) Alle abgeschlossen Teilmengen von X sind kompakt.

b) Alle kompakten Teilmengen von Y sind abgeschlossen.

c) Ist $f\colon X \to Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt, so ist auch $f(K)$ kompakt. Konstruieren Sie eine nicht stetige Abbildung $X \to Y$, die diese Eigenschaft ebenfalls erfüllt.

d) Ist $f\colon X \to Y$ bijektiv und stetig, so ist f bereits ein Homöomorphismus.

Folgern Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ vom letzten Zettel ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
In dieser Aufgabe beweisen Sie die topologische Invarianz der Dimension 1, das heißt, für jeden Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist $n = 1$. Zeigen Sie:

a) Sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Die Relation

$$x \sim y \iff \text{Es gibt einen Weg } \gamma\colon [0,1] \to X \text{ mit } \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf X. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $\pi_0(X)$.

b) Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ induziert eine wohldefinierte Abbildung $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$. Ist f ein Homöomorphismus, so ist $\pi_0(f)$ eine Bijektion.

c) Berechnen Sie $\pi_0(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$.

d) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. Dann ist $n = 1$. Hinweis: Betrachten Sie $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$.

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die blauen Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!