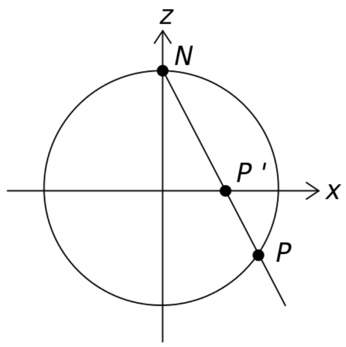
Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (5 Punkte)
In dieser Aufgabe sehen Sie, dass die Sphäre wirklich eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Es sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|x\| = 1\}$ und $N := (0, \ldots, 0, 1)$ und $S := (0, \ldots, 0, -1)$. Wir definieren Abbildungen $f_N := S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ und $f_S := S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$ wie folgt: Für $N \neq P \in S^n$ gibt es eine eindeutige Gerade durch N und x. Diese Gerade hat einen eindeutigen Schnittpunkt P' mit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dies ist im folgenden Bild verdeutlicht.



Wir definieren $f_N(P) = P'$. Die Abbildung f_S wird analog definiert. Geben Sie Formeln für f_N und f_S an und zeigen Sie, dass f_N und f_S einen glatten Atlas definieren und dass damit S^n eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Geben Sie einen topologischen Raum X an, der

a) lokal euklidisch und Hausdorffsch ist, aber keine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

b) eine abzählbare Basis der Topologie besitzt und Hausdorffsch ist, aber nicht lokal euklidisch.

c) eine abzählbare Basis der Topologie besitzt und lokal euklidisch ist, aber nicht Hausdorffsch.

Weisen Sie jeweils nach, dass diese Eigenschaften erfüllt sind.

Hinweis zu c): Betrachten Sie den folgenden Raum: $(-\infty, 0) \cup \{0_+, 0_-\} \cup (0, \infty)$ mit der Basis der Topologie gegeben wie folgt: $(a, b) \subset (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ist offen für $a, b \in \mathbb{R}$ und $(a, 0) \cup \{0_-\} \cup (0, b)$ sowie $(a, 0) \cup \{0_+\} \cup (0, b)$ sind offen für $a < 0 < b$. Zeigen Sie, dass dieser Raum die geforderten Eigenschaften hat.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Ein topologischer Raum X heißt lokal wegzusammenhängend, wenn für alle Punkte $x \in X$ und für jede Umgebung $U \subset X$ von x eine wegzusammenhängende Umgebung $U_x \subset U$ von x existiert. Betrachten Sie wieder die Äquivalenzrelation aus Aufgabe 4 vom vorherigen Zettel, d.h. $x \sim y \iff$ Es gibt einen Weg $\gamma \colon [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Zeigen Sie:

a) Ist X lokal wegzusammenhängend, so sind alle Äquivalenzklassen offen und abgeschlossen.

b) Ist X lokal wegzusammenhängend und zusammenhängend, so ist X wegzusammenhängend.

c) Es sei X nun eine Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass X lokal wegzusammenhängend ist. Also sind für Mannigfaltigkeiten die Begriffe "zusammenhängend" und "wegzusammenhängend" äquivalent.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierten komplex-projektiven Räume kompakte, glatte Mannigfaltigkeiten sind und bestimmen Sie deren reelle Dimension.

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den blauen Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!