Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1
Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $U \subset M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit und $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass $f|_U$ dann ebenfalls glatt ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es bezeichne $\mathrm{Mat}_{n,m}(k)$ die $n \times m$-Matrizen über $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$.

a) Es bezeichne $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\colon A^t = A\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass 0 ein regulärer Wert der folgenden Abbildung ist:

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^t A - \mathrm{id}_{n\times n} \end{aligned}$$

c) Folgern Sie, dass $O(n) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\colon A^t A = \mathrm{id}_{n\times n}\}$ eine Mannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie die Dimension.

d) Analog kann man zeigen, dass $U(n) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})\colon \overline{A}^t = A\}$ ebenfalls eine Mannigfaltigkeit ist. Gehen Sie die Schritte a) bis c) durch, analysieren Sie die Unterschiede und bestimmen Sie die (reelle) Dimension. *Hinweis:* Sie brauchen keinen ausführlichen Beweis zu führen.

e) Zeigen Sie, dass auch $SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\colon \det(A) = 1\}$ eine Mannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie die Dimension.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jeder Atlas in einem *eindeutigen* maximalen Atlas einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit enthalten ist.

b) Betrachten Sie $\mathbb{R}$ auf zwei Arten als Mannigfaltigkeit: Einmal ist eine Karte gegeben durch $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einmal durch $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$. Zeigen Sie, dass es keinen Atlas gibt, der beide Karten enthält. Also sind $(\mathbb{R}, id)$ und $(\mathbb{R}, f)$ zwei verschiedene glatte Mannigfaltigkeiten.

c) Zeigen Sie, dass es einen Diffeomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, id)$ und $(\mathbb{R}, f)$ gibt. So verschieden sind die Mannigfaltigkeiten also doch nicht.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es seien M und N Mannigfaltigkeiten der Dimension m und n und es sei $f\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass dann $n = m$ gilt.

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den blauen Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!