Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

# Elementare Geometrie

## Übungsblatt 7

**Aufgabe 1** (5 Punkte)
Betrachten Sie die Relation aus der Definition der geometrischen Tangentialvektoren: Es seien $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \to M$ zwei glatte Kurven mit $0 \in I$ und $\gamma(0) = p$ und es sei $\varphi$ eine Karte von $M$ um $p$. Wir definieren:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 :\iff (\varphi \circ \gamma_1)\dot{}(0) = (\varphi \circ \gamma_2)\dot{}(0)$$

Zeigen Sie, dass diese Definition unabhängig von der gewählten Karte ist.

**Aufgabe 2** (5 Punkte)
Betrachten Sie das Vektorfeld $V(x) = x^2 \frac{d}{dx}$ auf $\mathbb{R}$ und berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)
Betrachten Sie $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ als Untermannigfaltigkeit. Es sei $p \in S^n$ und $v$ orthogonal zu $p$. Zeigen Sie, dass es eine Kurve $\gamma \colon I \to S^n$ gibt, sodass $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$. Also ist der Tangentialraum von $T_pS^n$ gegeben durch das orthogonale Komplement von $p$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.

**Definition** Eine Lie-Gruppe ist eine glatte Mannigfaltigkeit $G$ zusammen mit glatten Abbildungen

$$\mu \colon G \times G \to G \qquad \iota \colon G \to G,$$

sodass $(G, \mu)$ eine Gruppe ist und $\iota(g) = g^{-1}$. In anderen Worten: eine Lie-Gruppe ist eine Gruppe, in der die Multiplikation sowie die Inversenbildung glatt sind.

**Aufgabe 4** (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen auch Lie-Gruppen sind:

a) $S^1 \subset \mathbb{C}$ mit Multiplikation komplexer Zahlen.

b) $GL_n(\mathbb{R})$ und $O(n)$ mit Matrixmultiplikation.

c) $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ mit der Multiplikation gegeben durch: $(a, b) \cdot (x, y) := (ax - \overline{b}y, bx + \overline{a}y)$.

**Aufgabe 5** (* Punkte)
In Aufgabe 4 von Blatt 6 fehlt eine kleine aber wichtige Voraussetzung. Zeigen Sie: Sind $M$ und $N$ Mannigfaltigkeiten unterschiedlicher Dimensionen und sind $f, g \colon M \to N$ Diffeomorphismen, so gilt $f = g$. Korrigieren Sie die Aufgabenstellung von Aufgabe 4, Blatt 6.

---

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den blauen Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!