Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Zeigen Sie: Für eine beliebige geschlossene, orientierbare Fläche Σ gibt es eine Einbettung $\iota\colon \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Es sei $X = [0,1] \times [0,1]/\sim$ versehen mit der Quotiententopologie, wobei $(s,t) \sim (s',t')$, wenn gilt

$$(s = s' \text{ oder } \{s,s'\} = \{0,1\}) \text{ und } (t = t' \text{ oder } \{t,t'\} = \{0,1\}))$$

Zeigen Sie, dass der Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ und X homöomorph sind, indem Sie einen expliziten Homöomorphismus angeben.

b) Es sei $X = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}/\sim$ versehen mit der Quotiententopologie, wobei $v \sim w$ falls $v = w$ oder $\|v\| = 1 = \|w\|$. Zeigen Sie, dass X und S^n homöomorph sind, indem Sie einen expliziten Homöomorphismus angeben..

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Benutzen Sie die Identifikation vom letzten Übungszettel (Aufgabe 3) um die Differentiale der folgenden Abbildungen auszurechnen.

a) Für $n \leq m$: $\iota\colon S^n \to S^m$, $(x_1,\dots,x_{n+1}) \mapsto (x_1,\dots,x_{n+1},0,\dots,0)$.

b) $S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$.

c) $h\colon S^3 \to S^2$ gegeben durch

$$h(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Big(2(x_1x_3 + x_2x_4),\ 2(x_2x_3 - x_1x_4),\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2\Big)$$

(Hier brauchen Sie nur das Differential bei $(1,0,0,0)$ zu berechnen).

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Berechnen Sie den Fluss für das folgende Vektorfeld X auf $\mathbb{R}^2$:

$$X(x,y) = y\frac{d}{dx} - x\frac{d}{dy}.$$

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den blauen Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!