Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

24. Januar 2020

Probeklausur Elementare Geometrie
Musterlösung

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei X eine Menge und $p \in X$. Wir definieren die folgende Topologie $\mathcal{O}_p$ durch

$$U \in \mathcal{O}_p \qquad \Longleftrightarrow \qquad p \in U \text{ oder } U = \emptyset.$$

Zeigen Sie:

a) Dies definiert wirklich eine Topologie.

b) Diese Topologie ist nicht Hausdorffsch.

c) Es sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $x_n := p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass diese Folge gegen x konvergiert für alle $x \in X$.

d) X ist wegzusammenhängend.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Da $p \in X$ gilt, dass $\emptyset, X \in \mathcal{O}_p$ (1 Punkt). Für eine beliebige Famile $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{O}_p$ ist $p \in U_i$ für alle $i \in I$ und damit ist $p \in \bigcup_{i\in I} U_i$ und $p \in \bigcap_{i\in I} U_i$ und somit ist $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}_p$ und $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}_p$.

b) Es seien $x, y \in X$ verschiedene Punkte, so gilt für alle offenen Umgebungen U_x (bzw. U_y) von x (bzw. y), dass $p \in U_x$ (bzw. U_y). Somit ist $p \in U_x \cap U_y \neq \emptyset$ und damit ist die Topologie nicht Hausdorffsch.

c) Eine Folge x_n konvergiert genau dann gegen x, falls für jede offene Umgebung U von x fast alle Folgenglieder von x_n in U liegen. Es sei also U eine offene Umgebung von x. Dann ist $x_n = p \in U$ per Definition und damit konvergiert x_n gegen x.

d) Es seien $a, b \in X$. Man betrachte den Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ definiert durch $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ und $\gamma(t) = p$ für $t \in (0,1)$. Für $U \in \mathcal{O}_p$ gilt dann

$$\gamma^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls} \quad U = \emptyset \\ (0,1) & \text{falls} \quad a \notin U \quad \& \quad b \notin U \\ (0,1] & \text{falls} \quad a \notin U \quad \& \quad b \in U \\ [0,1) & \text{falls} \quad a \in U \quad \& \quad b \notin U \\ [0,1] & \text{falls} \quad a \in U \quad \& \quad b \in U \end{cases}$$

Diese sind alle offen in der Teilraumtopologie von $[0,1]$ und damit ist γ ein Weg von a nach b.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es bezeichne $\mathrm{Mat}_{n,n}$ die reellen $n \times n$-Matrizen und $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \colon A^t = A\}$, wobei A^t die transponierte Matrix zu A ist.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ ist indem Sie einen Atlas angeben.

b) Zeigen Sie, dass 0 ein regulärer Wert der folgenden Abbildung ist:

$$\begin{aligned} f \colon \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^t A - \mathrm{id}_{n\times n} \end{aligned}$$

c) Folgern Sie, dass $O(n) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \colon A^t A = \mathrm{id}_{n\times n}\}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie die reelle Dimension.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Es gibt zueinander inverse Homöomorphismen:

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \qquad \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \dots \\ a_{1,n} \\ a_{2,2} \\ \dots \\ a_{2,n} \\ \dots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n(n+1)/2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_2 & x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{2n-1} \\ x_3 & x_{n+2} & x_{2n} & \dots & x_{3n-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{2n-1} & x_{3n-3} & \dots & x_{n(n+1)/2} \end{pmatrix}$$

In der zweiten Matrix stehen genau die Einträge von x über der Diagonale und unten links ist dann so ausgefüllt, dass die Matrix symmetrisch wird. Also haben wir eine globale Karte und damit einen Atlas. Dieser ist glatt, da es als Kartenwechsel nur die Identität gibt und lässt sich zu einem maximalen glatten Atlas fortsetzen und somit ist $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

b) 0 ist genau dann regulärer Wert, falls die das Differential von f bei allen Urbildern surjektiv ist. Urbilder von 0 sind genau Matrizen in $O(n)$. Da $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ und $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ jeweils homöomorph zu $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ sind, müssen wir nur zeigen, dass für alle $S \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ und alle $A \in O(n)$ eine Matrix $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ existiert, sodass die Ableitung von f bei A in Richtung X gleich S ist, d.h. $D_A f(X) = S$. Es gilt:

$$D_A f(X) = \lim_{h\to 0} \frac{f(A+hX) - f(A)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(A+hX)^t(A+hX) - \mathrm{id}_n \times n - A^tA + \mathrm{id}_{n\times n}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{A^t hX + hX^tA}{h} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{h^2X^tX}{h}}_{=0} = A^tX + X^tA = A^tX + (A^tX)^t$$

Nun gilt für jede symmetrische Matrix S, dass $S = \frac{1}{2}(S + S^t)$ und deswegen löst $X := \frac{1}{2}AS$ die Gleichung $D_A f(X) = S$. Somit ist 0 ein regulärer Wert von f.

c) Nach dem Satz vom regulären Wert ist $f^{-1}(0) = O(n)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension

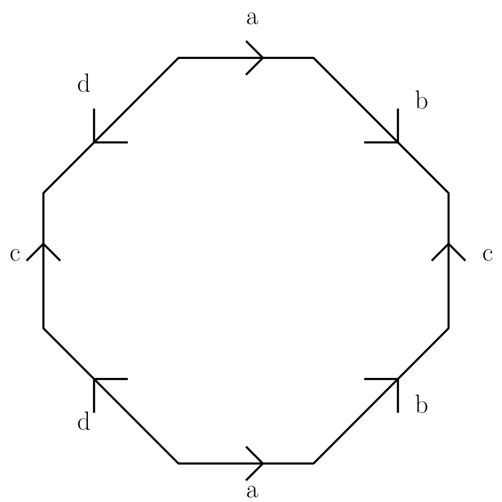
$$\dim O(n) = \dim \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

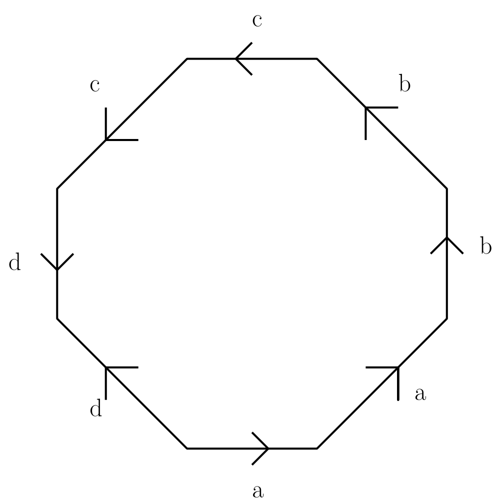
Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Geben Sie geschlossene Flächen S_1 und S_2 mit gleicher Eulercharakteristik an, sodass S_1 orientierbar ist und S_2 nicht.

b) Benutzen Sie den Klassifikationssatz für Flächen um zu zeigen, dass es eine Fläche S_3 gibt, sodass $S_3\#S_2$ homöomorph zu $S_3\#S_1$ ist.

c) Welche Flächen sind durch die folgenden Skizzen gegeben?





Lösung zu Aufgabe 3

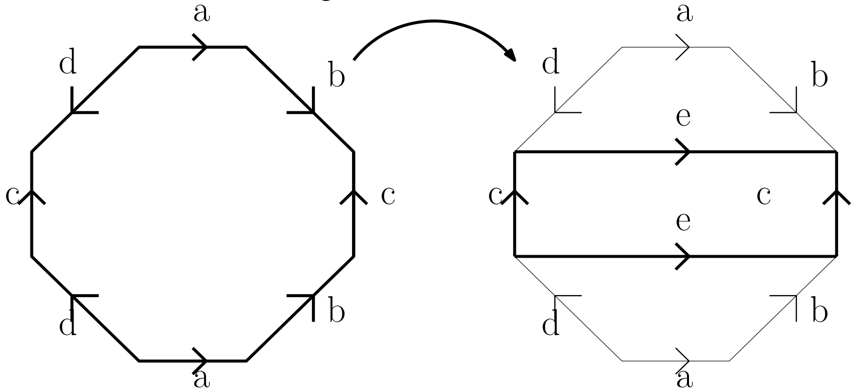
a) Alle möglichen Beispiele sind gegeben durch

$$S_1 = \underbrace{T^2\#\ldots\#T^2}_{n-\text{mal}} =: n\cdot T^2 \qquad S_2 = \underbrace{\mathbb{RP}^2\#\ldots\#\mathbb{RP}^2}_{2n-\text{mal}} =: 2n\cdot\mathbb{RP}^2,$$

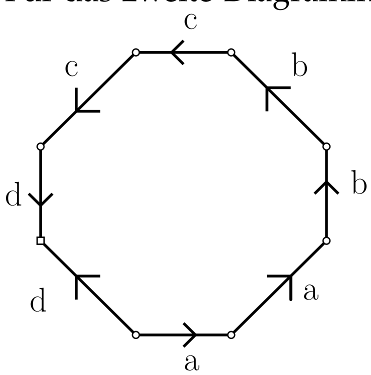
da nach Vorlesung $\chi(n\cdot T^2) = 2 - 2n = \chi(2n\cdot\mathbb{RP}^2)$.

b) Wähle $S_3 = \mathbb{RP}^2$. Wegen $\chi(M\#N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$ gilt dann $\chi(S_3\#S_1) = 2 - 2n - 1 = \chi(S_3\#S_2)$. Diese Zahlen sind jeweils ungerade und laut Klassifikationssatz für Flächen sind alle Flächen mit übereinstimmender, ungerader Eulercharakteristik homöomorph.

c) Man kann in dem Diagramm $d^{-1}ab$ durch e ersetzen und erhält den Torus:



Für das zweite Diagramm berechnet man zum Beispiel die Eulercharakteristik:



Es gibt 1 Fläche, 4 Kanten und 2 Punkte, die Eulercharakteristik ist somit -1 und die Fläche damit eindeutig bestimmt und homöomorph zu $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jede Menge X mit der Metrik d^δ gegeben durch

$$d^\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = y \\ 1 & \text{falls} \quad x \neq y \end{cases}$$

zu einem metrischen Raum wird.

b) Zeigen Sie, dass jede bijektive Abbildung $f\colon (X, d^\delta) \to (Y, d^\delta)$ eine Isometrie ist, wobei d^δ jeweils die Metrik aus Teil a) ist.

c) Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

d) Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen Isometrien sind und begründen Sie ihre Entscheidung:

1) $f\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$, $z \mapsto \frac{3z+4}{5z+6}$.
2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\binom{x}{y} = \frac{1}{2}\left(\binom{x}{-y} + \sqrt{3}\binom{y}{x}\right)$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Es sind die Axiome nachzurechnen. Es gilt:

   1) $d^\delta(x,y) = d^\delta(y,x)$.
   2) $d^\delta(x,y) \geq 0$ und $d^\delta(x,y) = 0 \iff x = y$.
   3) $d^\delta(x,z) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = z \\ 1 & \text{falls} \quad x \neq z \end{cases}$

   $$d^\delta(x,y) + d^\delta(y,z) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = y = z \\ 1 & \text{falls} \quad x \neq y = z \text{ oder } x = y \neq z \\ 2 & \text{falls} \quad x \neq y \neq z \end{cases}$$

   und damit $d^\delta(x,z) \leq d^\delta(x,y) + d^\delta(y,z)$.

b) Da f bijektiv ist, gilt $f(x) = f(y) \iff x = y$ und es folgt:

$$d^\delta(f(x), f(y)) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls} \quad f(x) = f(y) \\ 1 & \text{falls} \quad f(x) \neq f(y) \end{cases}\right\} = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = y \\ 1 & \text{falls} \quad x \neq y \end{cases}\right\} = d^\delta(x,y)$$

c) Laut Vorlesung/Übung ist eine Abbildung zwischen metrischen Räumen genau dann stetig, wenn sie $\epsilon - \delta$-stetig ist. Sei also $\epsilon > 0$ gegeben und wähle $\delta = \epsilon$ und $x, y \in X$, sodass $d_X(x,y) < \delta$. Dann folgt:

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y) < \delta = \epsilon$$

und damit ist f stetig (sogar gleichmäßig stetig oder Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1).

d) 1) f ist nichtmal eine Abbildung von $\mathbb{H}^2$, da für $z \in \mathbb{H}^2$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{3z+4}{5z+6}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(3z+4)(5\overline{z}+6)}{\|5z+6\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|5z+6\|} \operatorname{Im}(15\|z\| + 24 + 18z + 20\overline{z}) = \underbrace{\frac{-2}{\|5z+6\|}}_{<0} \underbrace{\operatorname{Im}(z)}_{>0} < 0 \end{aligned}$$

   und damit ist $f(z) \notin \mathbb{H}^2$ und f kann also keine Isometrie von $\mathbb{H}^2$ sein.

   2) Es gilt:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   Nun ist $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \end{pmatrix} \in O(2)$ und laut Vorlesung eine Isometrie von $\mathbb{R}^2$. Alternativ kann man dies auch adhoc nachrechnen:

$$\|\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}\right)\| = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = x^2 + y^2 = \|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\|$$