Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

24. Januar 2020

Probeklausur Elementare Geometrie

Name, Vorname:

Tutorium:

Zur Bearbeitung: Verwenden Sie für die Bearbeitung jeder Aufgabe ein neues Blatt, auf welches Sie die *Nummer der Aufgabe* sowie *Ihren Namen* schreiben.

Zur Bewertung: Jede Aufgabe wird mit bis zu 10 Punkten bewertet, so dass Sie insgesamt 40 Punkte erhalten können.

Punkte					
1	2	3	4	Σ	**Note**

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei X eine Menge und $p \in X$. Wir definieren auf X eine Topologie $\mathcal{O}_p$ durch

$$U \in \mathcal{O}_p \qquad \Longleftrightarrow \qquad p \in U \text{ oder } U = \emptyset.$$

Zeigen Sie:

a) Dies definiert wirklich eine Topologie.

b) Diese Topologie ist nicht Hausdorffsch.

c) Es sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $x_n := p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass diese Folge gegen x konvergiert für alle $x \in X$.

d) X ist wegzusammenhängend.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es bezeichne $\mathrm{Mat}_{n,n}$ die reellen $n \times n$-Matrizen und $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\colon A^t = A\}$, wobei A^t die transponierte Matrix zu A ist.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ ist indem Sie einen Atlas angeben.

b) Zeigen Sie, dass 0 ein regulärer Wert der folgenden Abbildung ist:

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^t A - \mathrm{id}_{n\times n} \end{aligned}$$

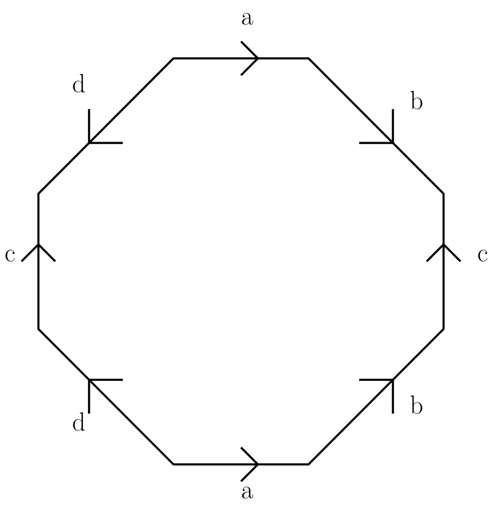
c) Folgern Sie, dass $O(n) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\colon A^t A = \mathrm{id}_{n\times n}\}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie die reelle Dimension.

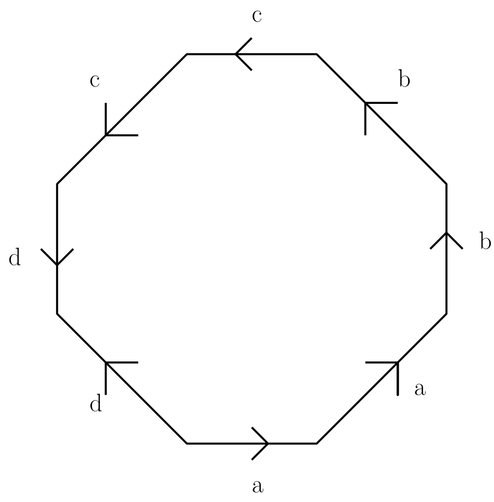
Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Geben Sie geschlossene Flächen S_1 und S_2 mit gleicher Eulercharakteristik an, sodass S_1 orientierbar ist und S_2 nicht.

b) Benutzen Sie den Klassifikationssatz für Flächen um zu zeigen, dass es eine Fläche S_3 gibt, sodass $S_3\#S_2$ homöomorph zu $S_3\#S_1$ ist.

c) Welche Flächen sind durch die folgenden Skizzen gegeben?





Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jede Menge X mit der Metrik d^δ gegeben durch

$$d^\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = y \\ 1 & \text{falls} \quad x \neq y \end{cases}$$

zu einem metrischen Raum wird.

b) Zeigen Sie, dass jede bijektive Abbildung $f\colon (X, d^\delta) \to (Y, d^\delta)$ eine Isometrie ist, wobei d^δ jeweils die Metrik aus Teil a) ist.

c) Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

d) Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen Isometrien sind und begründen Sie ihre Entscheidung:

1) $f\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$, $z \mapsto \frac{3z+4}{5z+6}$.
2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\binom{x}{y} = \frac{1}{2}\left(\binom{x}{-y} + \sqrt{3}\binom{y}{x}\right)$.