Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Einführung in Geometrie und Topologie (Wintersemester 2015/16)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ als Abbildung $(X, \mathcal{O}_{d_X}) \to (Y, \mathcal{O}_{d_Y})$ topologischer Räume genau dann stetig ist, wenn für alle $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $y \in X$ gilt

$$d(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Aufgabe 2

Es seien X eine Menge und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein topologischer Raum, und es bezeichne $\mathcal{O}_{\text{diskret}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\text{trivial}}$) die diskrete (resp. triviale) Topologie von X. Zeigen Sie:

(a) Einerseits ist jede Abbildung $(X, \mathcal{O}_{\text{diskret}}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig, andererseits sind die einzigen stetigen Abbildungen $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_{\text{diskret}})$ die *lokal konstanten Abbildungen*, d. h. die Abbildungen, welche die folgende Eigenschaft erfüllen: Jeder Punkt $y \in Y$ hat eine Umgebung, auf welcher die Abbildung konstant ist.

(b) Jede Menge in $(X, \mathcal{O}_{\text{diskret}})$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen. Insbesondere entspricht jede Teilmenge von X ihrem Abschluss und ihrem Inneren (in X), und der Rand jeder Menge (in X) ist leer.

(c) Welche (vergleichbaren) Aussagen lassen sich treffen, wenn man in (a) und (b) $\mathcal{O}_{\text{diskret}}$ durch $\mathcal{O}_{\text{trivial}}$ ersetzt?

Aufgabe 3

Es seien X ein topologischer Raum, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Ein Punkt $x \in X$ heißt Grenzwert von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn in jeder Umgebung von x alle bis auf endlich viele x_k liegen. Machen Sie sich klar, dass dies im Falle $X = \mathbb{R}^n$ versehen mit der Standardtopologie mit der Ihnen bekannten Definition übereinstimmt. Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer Folge im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 4

Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ bezeichne $G(x)$ die Gerade, die durch den Punkt x und den Ursprung verläuft, und $G(0, \ldots, 0) = \{(0, \ldots, 0)\}$.

(a) Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{B} = \{G(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

eine Basis einer Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist, deren nichtleere offene Mengen alle den Ursprung enthalten. Diese Topologie heiße $\mathcal{O}$.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ gibt, die $\mathcal{O}$ induziert.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.