Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Karlsruher Institut für Technologie

Einführung in Geometrie und Topologie (Wintersemester 2015/16)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Parametrisierungen von Flächen im $\mathbb{R}^3$:

$$f_1(x,y) = (x,y,0) \qquad f_2(x,y) = (\cosh x \cos y, \cosh x \sin y, x)$$
$$g_1(x,y) = (x, \sin y, \cos y) \qquad g_2(x,y) = (\sinh x \sin y, -\sinh x \cos y, y)$$

(a) Berechnen Sie jeweils die erste Fundamentalform.

(b) Skizzieren Sie die Bilder der Parametrisierungen.

(c) Vergleichen Sie für eine glatte Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ die Bogenlängen von $f_i \circ \gamma$ und $g_i \circ \gamma$ für $i \in \{1,2\}$.

Aufgabe 2

Es sei $N = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ und

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, (u,v) \mapsto \frac{1}{u^2+v^2+1}(2u, 2v, u^2+v^2-1)$$

die Umkehrabbildung der stereographischen Projektion vom Nordpol aus. Zeigen Sie, dass r eine *konforme Abbildung* ist, d.h. für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ und alle $X, Y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong (\mathrm{T}_{(u,v)}\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ gilt $\angle(X,Y) = \angle(r_*X, r_*Y)$.

Hinweis: Berechnen Sie die erste Fundamentalform.

Aufgabe 3

Es sei $r(u,v) = f(u)(\cos(v)e_1 + \sin(v)e_2) + ue_3$ Parametrisierung einer Rotationsfläche. Zeigen Sie, dass für die erste Fundamentalform

$$I(u,v) = (1 + f'(u)^2)du^2 + f(u)^2 dv^2$$

gilt und $r([a,b] \times (0, 2\pi))$ den Flächeninhalt

$$A = 2\pi \int_a^b f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2}\, du$$

besitzt.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Sphäre $\mathbb{S}^2(r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.