Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Einführung in Geometrie und Topologie (Wintersemester 2015/16)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Parametrisierungen von Flächen im $\mathbb{R}^3$:

$$f_1(x,y) = (x,y,0) \qquad f_2(x,y) = (\cosh x \cos y, \cosh x \sin y, x)$$
$$g_1(x,y) = (x, \sin y, \cos y) \qquad g_2(x,y) = (\sinh x \sin y, -\sinh x \cos y, y)$$

Berechnen Sie jeweils die zweite Fundamentalform und die Gaußkrümmung.

Aufgabe 2

Es sei eine Parametrisierung

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(u) \\ 0 \\ \beta(u) \end{pmatrix}$$

mit einer glatten und injektiven Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3, c(u) = (\alpha(u), 0, \beta(u))^\top$, so dass $\alpha(u) > 0$ und $\alpha'(u)^2 + \beta'(u)^2 = 1$ für alle $u \in I$ gilt, gegeben. Zeigen Sie, dass für die Gaußkrümmung K von $\mathrm{Bild}(r)$ gilt

$$K(u,v) = -\frac{\alpha''(u)}{\alpha(u)}.$$

Hinweis: Die Ableitung von $\alpha'(u)^2 + \beta'(u)^2$ könnte hilfreich sein.

Aufgabe 3

Für $-1 < s < 1$ sei $C_s = \mathbb{S}^2 \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = s\}$. Stellen sie C_s als Bild einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve γ_s dar und berechnen Sie die geodätische Krümmung von γ_s als Kurve in $\mathbb{S}^2$, wobei $\mathbb{S}^2$ durch $n(p) := p$ orientiert sei.

Aufgabe 4

Es sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und r eine Parametrisierung von F mit erster bzw. zweiter Fundamentalform I bzw. II. Weiter seien $g_{r(u,v)}$ und $h_{r(u,v)}$ die durch $I_{r(u,v)}$ und $II_{r(u,v)}$ definierten symmetrischen Bilinearformen auf $\mathrm{T}_{r(u,v)}F$.

Die *Weingartenabbildung* ist die lineare Abbildung $W_{r(u,v)} : \mathrm{T}_{r(u,v)}F \to \mathrm{T}_{r(u,v)}F$ mit $h_{r(u,v)}(X,Y) = g_{r(u,v)}(W_{r(u,v)}(X), Y)$ für alle $X, Y \in \mathrm{T}_{r(u,v)}F$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $W_{r(u,v)}$ bezüglich der Basis $r_u(u,v)$, $r_v(u,v)$ von $\mathrm{T}_{r(u,v)}F$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gaußkrümmung $K(r(u,v))$ von F in $r(u,v)$ das Produkt der Eigenwerte von $W_{r(u,v)}$ ist.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.