Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Einführung in Geometrie und Topologie (Wintersemester 2015/16)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1

Zeigen Sie, das für die Kurven γ_s aus Aufgabe 3, Blatt 12, der lokale Satz von Gauß-Bonnet tatsächlich gilt, d.h. berechnen Sie die beiden Seiten der Gleichung

$$\int_{\gamma_s} \kappa_g(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi - \int_{R_s} K\,\mathrm{d}A$$

getrennt voneinander. Hierbei bezeichnet R_s den von γ_s umschlossenen Integrationsbereich in $\mathbb{S}^2$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Zugehörigkeit der Determinante der Hesse-Matrix einer Funktion zu $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}_{<0}$ bzw. $\{0\}$ in einem nichtkritischen Punkt im Allgemeinen von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. Betrachten Sie hierzu die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ und finden sie lokale Koordinatensysteme um einen Punkt $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0, y_0 > 0$, in denen die Hesse-Matrix negative bzw. verschwindende Determinante hat.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass es Überlagerungen

(a) $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ und
(b) $\mathrm{T}^2 \to \mathrm{K}^2$

gibt.

Aufgabe 4

Es seien X_1 und X_2 topologische Räume und $x_i \in X_i$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass für die Fundamentalgruppe des Produktraumes

$$\pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2)) \cong \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$$

gilt. Das *direkte Produkt* $G \times H$ zweier Gruppen G und H ist dabei das kartesische Produkt der Mengen mit der Verknüpfung $(g, h) \cdot (g', h') = (g \cdot g', h \cdot h')$.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.