Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Einführung in Geometrie und Topologie (Wintersemester 2015/16)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : (X; \mathcal{O}(d_X)) \to (Y, \mathcal{O}(d_Y))$ genau dann stetig ist, wenn sie *folgenstetig* ist, das heißt, wenn für jedes $x \in X$ und jede gegen x konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass jedes offene Intervall (a, b) für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ homöomorph zu $(0, 1)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(0, 1)$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

(c) Sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ homöomorph?

Aufgabe 3

(a) Es seien X ein topologischer Raum, I eine Menge und für alle $i \in I$ sei $Z_i \subset X$ zusammenhängend. Ferner gelte, dass $\bigcap_{i\in I} Z_i \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i\in I} Z_i$ zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Produkt $X \times Y$ zweier nichtleerer topologischer Räume genau dann zusammenhängend ist, wenn X und Y zusammenhängend sind.

(c) Zeigen Sie (a) und (b) für „wegzusammenhängend“ statt „zusammenhängend“.

Aufgabe 4

Die reellen $(n \times n)$-Matrizen lassen sich identifizieren mit $\mathbb{R}^{n^2}$. Demzufolge versehen wir $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid A = A^{\mathrm{T}} \right\}$ und die Matrixgruppe $\mathrm{O}(n)$ als Teilmengen von $\mathbb{R}^{n^2}$ mit der Teilraumtopologie. Untersuchen Sie $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{O}(n)$ auf Wegzusammenhang und Kompaktheit.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.