Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Einführung in Geometrie und Topologie (Wintersemester 2015/16)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob die angegebenen topologischen Räume topologische Mannigfaltigkeiten sind. Geben Sie gegebenenfalls eine glatte Struktur der betreffenden Mannigfaltigkeiten an.

(a) $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ und

(b) $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}\}$, jeweils versehen mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Unterraumtopologie.

(c) $X_3 = \mathbb{R} \times A$, wobei $A = \mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie versehen sei und X_3 die Produkttopologie trage.

Aufgabe 2

Für $i = 0, \dots, n$ sei

$$U_i^+ = \{x = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{S}^n \mid x^i > 0\} \text{ und } U_i^- = \{x = (^0, \dots, x^n) \in \mathbb{S}^n \mid x^i < 0\}.$$

Weiter bezeichne $\phi_i^\pm : U_i^\pm \to \phi_i^\pm(U_i^\pm) \subset \mathbb{R}^n$ die Projektion

$$\phi_i^\pm(x^0, \dots, x^n) = (x^0, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^n) = (x^0, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n),$$

welche die i-te Komponente weglässt. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \big\{(\phi_i^\varepsilon, U_i^\varepsilon) \mid \varepsilon \in \{+, -\}, i = 0, \dots, n\big\}$ einen Atlas auf $\mathbb{S}^n$ definiert, der mit dem durch stereographische Projektionen gegeben verträglich ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für topologische Mannigfaltigkeiten die Eigenschaften „zusammenhängend“ und „wegzusammenhängend“ äquivalent sind.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.

Nachricht der Fachschaft Mathematik und Informatik:

MATHEBAU

REOPENING PARTY

19:00
UHR

MATHEBAU
–
ENGLERSTR. 2

www.mathebau.rocks

HELFT MIT!

Tragt euch in eurer liebste Helferschicht ein!

www.mathebau.rocks/hilf-mit