Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Einführung in Geometrie und Topologie (Wintersemester 2015/16)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der Rotationstorus

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 = r^2\}$$

für $a > r > 0$ eine C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, die zum Torus $\mathrm{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ diffeomorph ist.

Aufgabe 2

Es sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$, versehen mit der Unterraumtopologie.

(a) Zeigen Sie: M ist keine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$, wenn $\mathbb{R}^2$ mit der kanonischen C^∞-Struktur versehen ist.

(b) Beweisen Sie, dass M zu $\mathbb{R}$ homöomorph ist und eine C^∞-Struktur trägt.

(c) Gibt es eine C^∞-Struktur $\mathcal{A}$ auf $\mathbb{R}^2$ (mit der üblichen Topologie) für die M zu einer C^∞-Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$ wird?

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Matrixgruppen

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}, \quad \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$$

und

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^\top = I\}$$

C^∞-Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass für $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Matrizenmultiplikation $G \times G \to G, (A, B) \mapsto AB$ und die Inversenbildung $G \to G, A \mapsto A^{-1}$ glatte Abbildungen sind.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.