Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Einführung in Geometrie und Topologie (Wintersemester 2015/16)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

(a) Finden Sie einen C^∞-Diffeomorphismus zwischen dem Zylinder

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

und der punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(b) Es seien N und N' zwei C^k-Mannigfaltigkeiten ($k \in \{1, 2, \dots, \infty\}$) und $f : N \to N'$ ein C^k-Diffeomorphismus. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $M \subseteq N$ ist genau dann eine C^k-Untermannigfaltigkeit von N, wenn ihr Bild $f(M) \subseteq N'$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit von N' ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass

$$M = \left\{ \big(\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), u\big) \;\middle|\; (u, v) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

eine C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und skizzieren Sie diese.

Aufgabe 3

(a) Es sei $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$ eine glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Weiter sei $f : U \to \mathbb{R}^l$ eine auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^{n+l}$ mit $p \in U$ definierte glatte Funktion mit $\mathrm{Rang} Df(x) = l$ für alle $x \in U$ und $f^{-1}(0) = U \cap M$ (wie in Teil (a) der Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten). Zeigen Sie, dass für den Tangentialraum $\mathcal{T}_pM$ der Untermannigfaltigkeit M im Punkt p gilt, dass $\mathcal{T}_pM = \{p\} \times \mathrm{Kern}(Df(p))$.

(b) Bestimmen Sie den Tangentialraum an $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in einem Punkt $p \in \mathbb{S}^n$.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.