Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Martin Herrmann

Einführung in Geometrie und Topologie (Wintersemester 2015/16)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Es sei M eine C^∞-Untermannigfaltigkeit einer glatten Mannigfaltigkeit N und $\iota : M \hookrightarrow N, p \mapsto p$ die Inklusion von M in N . Zeigen Sie, dass $\iota_* : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$ ein Diffeomorphismus auf eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{T}N$ ist.

Bemerkung: Da $\mathrm{T}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist, folgt hieraus, dass das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n}$ ist. Mit dem kanonischen Isomorphismus $\mathrm{T}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist diese Untermannigfaltigkeit gerade gegeben durch $\bigcup_{p\in M} \mathcal{T}_p M = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M, v \in \mathcal{T}_p M\}$.

Aufgabe 2

Finden Sie drei Vektorfelder auf $\mathbb{S}^3$ die in jedem Punkt $p \in \mathbb{S}^3$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Benutzen Sie zur Definition der Vektorfelder, dass $\mathrm{T}\mathbb{S}^3 \subset \mathrm{T}\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ ist (siehe Aufgabe 1).

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass der *Nullschnitt* $0_M := \{0 \in \mathrm{T}_p M \mid p \in M\}$ eine zu M diffeomorphe Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{T}M$ ist.

Aufgabe 4

Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine Immersion. Zeigen Sie: Ist g eine Riemannsche Metrik auf N, so ist f^*g, definiert durch

$$(f^*g)_p(X_p, Y_p) := g_{f(p)}(f_{*_p} X_p, f_{*_p} Y_p)$$

für alle $p \in M$ und $X_p, Y_p \in \mathrm{T}_p M$, eine Riemannsche Metrik auf M.

Abgabe bis zum Freitag der nächsten Woche, 12 Uhr in die gelben Kästen im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30). Die Kästen befinden sich im Erdgeschoss. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.