

Einführung in Geometrie und Topologie (Wintersemester 2015/16)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Es sei $X = ([0, 1] \times [0, 1]) / \sim$ versehen mit der Quotiententopologie, wobei $(s, t) \sim (s', t')$, wenn gilt:

$$(s = s' \text{ oder } \{s, s'\} = \{0, 1\}) \text{ und } (t = t' \text{ oder } \{t, t'\} = \{0, 1\}).$$

Zeigen Sie, dass der Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ und X homöomorph sind, indem Sie explizit einen Homöomorphismus angeben.

Aufgabe 2

Es sei $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} / \sim$ versehen mit der Quotiententopologie, wobei $x \sim y$, wenn $x = y$ oder $\|x\| = \|y\| = 1$. Zeigen Sie, dass X und S^n homöomorph sind, indem Sie explizit einen Homöomorphismus angeben.

Aufgabe 3

Es sei X ein topologischer Raum, \sim eine Äquivalenzrelation auf X und $Y = X / \sim$ versehen mit der Quotiententopologie. Weiter sei $\pi : X \rightarrow Y = X / \sim$ die kanonische Projektion.

- (a) Zeigen Sie: Für jeden topologischen Raum Z und jede (beliebige) Abbildung $f : Y \rightarrow Z$ gilt: f ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi$ stetig ist.

Aufgabe 4

Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie die Quotiententopologie auf \mathbb{R} / \sim . Ist diese Hausdorffsch?

Zusatzaufgabe

Malen oder basteln Sie ein Möbiusband oder eine Kleinsche Flasche. Die besten Exemplare werden mit einem ‚Alltagstorus‘ prämiert!