Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. M. Wiemeler

Globale Differentialgeometrie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Der zweidimensionale Torus $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ operiert auf $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ durch

$$T^2 \times S^3 \to S^3 \qquad ((z_1, z_2), (x_1, x_2)) \mapsto (z_1 x_1, z_2 x_2).$$

(a) Ist die Gruppenwirkung transitiv?

(b) Geben Sie die Isotropiegruppen an.

(c) Welche Untergruppen von T^2 operieren frei auf S^3?

(d) Bestimmen Sie den Orbitraum der Operation.

(e) Operiert T^2 (bezüglich der kanonischen Metrik) auf S^3 durch Isometrien?

Aufgabe 2

Es sei G eine Lie-Gruppe und M eine G-Mannigfaltigkeit. Dann definiert

$$G \times (M \times G) \to M \times G \qquad (g, (x, h)) \mapsto (gx, gh)$$

eine G-Operation auf $M \times G$. Zeigen Sie, dass diese Operation frei ist und M und $(M \times G)/G$ diffeomorph sind.

Aufgabe 3

Es sei $n \geq k$. Zeigen Sie, dass der Raum $G_{k,n}$ der k-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit ist. **Hinweis:** Zeigen Sie, dass $G_{k,n}$ ein homogener Raum ist.