Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. M. Wiemeler

Globale Differentialgeometrie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Es seien M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K_\sigma \geq 0$ und $\gamma, \sigma : [0, \infty[\to M$ Geodätische mit $\gamma(0) = \sigma(0) = p$. Es gelte $d(\gamma(0), \gamma(s)) = s$ für alle $s > 0$ und $\angle(\gamma'(0), \sigma'(0)) < \pi/2$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{t \to \infty} d(\sigma(0), \sigma(t)) = \infty.$$

Aufgabe 2

Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $f : M \to \mathbb{R}$ sei $E_f = \{(p, a) \in M \times \mathbb{R};\ f(p) \leq a\}$. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn E_f eine total konvexe Teilmenge des Riemannschen Produkts $M \times \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3

Es sei M eine vollständige nicht-kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-negativer Schnittkrümmung und $C \subset M$ eine kompakte total konvexe Teilmenge von M.

(a) Angenommen, eine Geodätische $\gamma :]-\infty, \infty[\to M$ ist in C enthalten. Zeigen Sie, dass es ein $a \geq 0$ gibt, so dass γ in ∂C^a enthalten ist, wobei

$$C^a = \{p \in C;\ d(p, \partial C) \geq a\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jede Geodätische γ, die die Seele S von M transversal schneidet, gilt:

$$\lim_{t \to \pm\infty} d(\gamma(t), S) = \infty.$$

Hinweis: Man sagt eine Kurve $\gamma : [a, b] \to M$ schneidet eine Untermannigfaltigkeit S von M transversal, wenn für alle $t \in [a, b]$ mit $\gamma(t) \in S$ gilt $\gamma'(t) \notin T_{\gamma(t)}S$.