Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. M. Wiemeler

Karlsruher Institut für Technologie

Globale Differentialgeometrie
Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Es sei R der Krümmungstensor einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Wir definieren den Krümmungsoperator $\hat{R} \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2(TM), \Lambda^2(TM))$ durch

$$\langle\langle \hat{R}(x \wedge y), w \wedge z \rangle\rangle = \langle R(x,y)z, w\rangle$$

für $p \in M$ und alle $x, y, w, z \in T_pM$.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{R}$ bezüglich des durch die Riemannsche Metrik von M auf $\Lambda^2(TM)$ induzierten Skalarprodukts $\langle\langle\, .\, , .\, \rangle\rangle$ symmetrisch ist.

(b) Es seien $\hat{r}_{\max}$ und $\hat{r}_{\min}$ der maximale beziehungsweise minimale Eigenwert von $\hat{R}$. Zeigen Sie, dass dann für die Schnittkrümmung K_σ gilt: $\hat{r}_{\min} \leq K_\sigma \leq \hat{r}_{\max}$.

Aufgabe 2

Es sei G eine Lie-Gruppe und $\langle\, .\, , .\, \rangle$ eine linksinvariante Metrik auf G. Zeigen Sie, dass für linksinvariante Vektorfelder X und Y

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\big([X,Y] - (\mathrm{ad}_X)^*(Y) - (\mathrm{ad}_Y)^*(X)\big)$$

gilt, wobei $\mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y]$ und * die adjungierte Abbildung bezüglich $\langle\, .\, , .\, \rangle$ bezeichnet.

Aufgabe 3

Es seien

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

G wird als *Heisenberg-Gruppe* bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Basis ξ_1, ξ_2, ξ_3 der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G gibt, so dass $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3$ und $[\xi_1, \xi_3] = [\xi_2, \xi_3] = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass der homogene Raum $M := G/\Gamma$ eine geschlossene Mannigfaltigkeit mit $\pi_1(M) \cong \Gamma$ ist.

Aufgabe 4

Es seien G, $\mathfrak{g}$, M und ξ_i, $i = 1, 2, 3$, wie in der vorangegangen Aufgabe. Für $0 < q \leq 1$ definieren wir eine linksinvariante Metrik g_q auf G durch

$$g_q(\xi_1, \xi_1) = q^2 = g_q(\xi_2, \xi_2), \quad g_q(\xi_3, \xi_3) = q^4 \ \text{ and } \ g_q(\xi_i, \xi_j) = 0 \text{ for } i \neq j.$$

Zeigen Sie, dass $-\frac{3}{4} \leq \sec(M, g_q) \leq \frac{1}{4}$ für alle $q \in (0, 1]$ gilt, und folgern Sie, dass M fast nicht-negative Schnittkrümmung besitzt.