Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. M. Wiemeler

Karlsruher Institut für Technologie

Globale Differentialgeometrie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Es bezeichne $\mathbb{H}P^n$ den n-dimensionalen quaternional projektiven Raum.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}P^n$ der Quotient einer freien Wirkung einer Lie-Gruppe auf einer Sphäre S^k geeigneter Dimension ist.

(b) Folgern Sie, dass $\mathbb{H}P^n$ ein Biquotient von $SO(k+1)$ ist.

(c) Folgern Sie ferner, dass es auf $\mathbb{H}P^n$ eine Metrik mit positiver Schnittkrümmung gibt.

Aufgabe 2

Es sei $\pi : M \to B$ eine Riemannsche Submersion.

(a) Es sei $p \in M$ und $\gamma : [0,\epsilon[\to B$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = \pi(p)$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige (lokal definierte) Geodätische $\tilde{\gamma} : [0,\epsilon[\to M$ gibt, die ein horizontaler Lift von γ ist und $\tilde{\gamma}(0) = p$ erfüllt.

(b) Es sei $\tilde{\gamma}$ eine Geodätische in M. Wir nehmen an, dass $\tilde{\gamma}'(0)$ horizontal ist. Zeigen Sie, dass $\tilde{\gamma}'(t)$ für alle t horizontal und $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ eine Geodätische in B ist.

(c) Zeigen Sie ferner, dass B vollständig ist, wenn M vollständig ist. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 3

Es sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und M eine G-Mannigfaltigkeit. Außerdem seien $X, Y \in \mathfrak{g}$ und

$$X^+(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tX) \cdot p \qquad \text{und} \qquad Y^+(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tY) \cdot p$$

die durch X und Y induzierten Vektorfelder auf M. Zeigen Sie, dass gilt:

$$[X^+, Y^+] = -[X,Y]^+.$$

Aufgabe 4

Es sei $\pi : M \to B$ eine Riemannsche Submersion und $c : [a,b] \to M$ eine glatte Kurve. Zeigen Sie, dass c nicht kürzer als $\pi \circ c$ ist, und folgern Sie, dass die Durchmesserabschätzung $\mathrm{diam} B \le \mathrm{diam} M$ gilt.