Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. M. Wiemeler

Globale Differentialgeometrie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit bi-invarianter Metrik und diskretem Zentrum. Zeigen Sie, dass G kompakt ist. Gilt diese Aussage auch, wenn die Dimension des Zentrums positiv ist?

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Die Schnittkrümmungen einer kompakten Lie-Gruppe G mit bi-invarianter Metrik verschwinden genau dann identisch, wenn G abelsch ist. Gilt dies auch, wenn G nicht kompakt ist?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass $SU(n)$ für alle $n \geq 2$ einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 4

Für $(k,l) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ sei die Untergruppe

$$T_{k,l} = \left\{ \begin{pmatrix} z^k & 0 & 0 \\ 0 & z^l & 0 \\ 0 & 0 & z^{-(l+k)} \end{pmatrix} \in SU(3);\ z \in S^1 \right\}$$

von $SU(3)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $SU(3)/T_{k,l}$ einfach zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass $SU(3)/T_{k,l}$ eine $SU(3)$-invariante Metrik mit nicht-negativer Schnittkrümmung und positiver Ricci-Krümmung zulässt.

Bemerkung: Die homogenen Räume $SU(3)/T_{k,l}$ werden als Aloff-Wallach-Räume bezeichnet.