Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. M. Wiemeler

Globale Differentialgeometrie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Es sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist.

(b) Ist M auch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand?

Aufgabe 2

Es sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und $\omega \in \Omega^k(N)$. Dann ist der Pullback $f^*\omega$ von ω entlang f, die durch

$$(f^*\omega)_p(X_{1,p}, \ldots, X_{k,p}) = \omega_{f(p)}(f_*X_{1,p}, \ldots, f_*X_{k,p}) \qquad (p \in M,\ X_{i,p} \in T_pM)$$

definierte k-Form auf M. Zeigen Sie, dass gilt

$$f^*d\omega = df^*\omega.$$

Aufgabe 3

Es sei f die Einschränkung der Abbildung

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z,t) \mapsto (p,q,r) = (2(xz+yt), 2(-xt+yz), (-x^2-y^2+z^2+t^2))$$

auf $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ und

$$\nu = (p\ dq \wedge dr + q\ dr \wedge dp + r\ dp \wedge dq)|_{S^2}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) f ist eine glatte Abbildung von S^3 nach S^2.

(b) $\lambda = f^*\nu = 4(dx \wedge dy + dz \wedge dt)|_{S^3}$. **Hinweis:** Es gilt $(x^2+y^2+z^2+t^2)|_{S^3} = 1$ und $(x\ dx + y\ dy + z\ dz + t\ dt)|_{S^3} = 0$.

(c) $\lambda = 2d\theta$, wobei $\theta = (-y\ dx + x\ dy - t\ dz + z\ dt)|_{S^3}$.