Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. M. Wiemeler

Karlsruher Institut für Technologie

Globale Differentialgeometrie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Es sei $\mathbb{B}$ der abgeschlossene Einheitsball in $\mathbb{R}^3$ und $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ die 2-Form

$$\omega = x^2\, dy \wedge dz + y^3\, dz \wedge dx + z^4\, dx \wedge dy.$$

Berechnen Sie seperat, d.h. ohne Verwendung des Satzes von Stokes, die Integrale

$$\int_{\mathbb{B}} d\omega \text{ und } \int_{\partial\mathbb{B}} \omega$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 2

Es seien M und N zwei orientierte, kompakte n-Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Zwei glatte Abbildungen $f_0, f_1 : M \to N$ heißen (glatt) homotop, falls eine glatte Abbildung
$F : M \times [0,1] \to N$ mit
$F(x,0) = f_0(x)$ und $F(x,1) = f_1(x)$ existiert.
Beweisen Sie den Satz: Ist ω eine n-Form auf N und sind $f_0, f_1 : M \to N$ homotope Abbildungen, so gilt

$$\int_M f_0^*(\omega) = \int_M f_1^*(\omega).$$

Aufgabe 3

Es sei $A : S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$, die Antipodal-Abbildung der n-Sphäre in sich. Zeigen Sie, dass A nur für ungerade n homotop zur Identität ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Auf einer Sphäre S^{2k} gerader Dimension hat jedes glatte Vektorfeld mindestens eine Nullstelle.