Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. M. Wiemeler

Globale Differentialgeometrie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Es seien (M^n, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, Ω das Riemannsche Volumenelement und (φ, U) eine Karte von M. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(\varphi^{-1})^*(\Omega) = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Aufgabe 2

Durch Rotation eines Kreises mit Mittelpunkt $(a, 0, 0)$ und Radius b, $0 < b < a$, um die z-Achse erhält man einen eingebetteten Torus T^2 in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie für die induzierte Riemannsche Metrik auf T^2 das Riemannsche Volumenelement und benutzen Sie dieses, um das Volumen von T^2 zu berechnen.

Aufgabe 3

Für die de Rham-Kohomologiegruppen gilt folgender Satz:

Es sei M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Überdeckung $\{U, V\}$. Dann gibt es Homomorphismen $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$, so dass

$$0 \longrightarrow H^0_{dR}(M) \xrightarrow{\alpha_0} H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V) \xrightarrow{\beta_0} H^0_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta_0} H^1_{dR}(M) \xrightarrow{\alpha_1} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\beta_{n-1}} H^{n-1}_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n_{dR}(M) \xrightarrow{\alpha_n} H^n_{dR}(U) \oplus H^n_{dR}(V) \xrightarrow{\beta_n} H^n_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta_n} 0$$

eine lange exakte Sequenez ist.

Die hier auftretende Sequenz wird Mayer-Vietoris-Sequenz genannt.

Berechnen Sie mit der Mayer-Vietoris-Sequenz die de Rham-Kohomologie der n-dimensionalen Sphären, $n \geq 1$.