Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Globale Differentialgeometrie (WS 2018)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.
Es seien (M, g_M) und (N, g_N) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

(1) Berechnen Sie die Schnittkrümmungen, die Ricci-Krümmungen und die Skalarkrümmung der Riemannschen Produktmetrik $g_M + g_N$ auf der Mannigfaltigkeit $M \times N$ in Termen der Metriken auf M und N.

(2) Wie verändert sich die Schnittkrümmung, das Volumen und der Durchmesser der Metrik g_M unter Skalierungen, d.h. bei Übergang zur Riemannschen Metrik λg_M auf M für $\lambda > 0$?

Aufgabe 2.
Eine *Gruppenwirkung* einer Lie-Gruppe $(G, \star)$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Abbildung $\rho \colon G \times M \to M$ mit den Eigenschaften:

(1) $\rho(e_G, x) = x$ für alle $x \in M$, wobei e_G das neutrale Element von G bezeichne,

(2) $\rho(g, \rho(h, x)) = \rho(g \star h, x)$ für alle $g, h \in G$ und $x \in M$.

Die Untergruppe $G_x := \{g \in G \mid \rho(g, x) = x\}$ von G heißt *Isotropiegruppe* im Punkt $x \in M$, während der Quotient $M/G := \{\rho(G, x) \mid x \in M\}$ als *Orbitraum* bezeichnet wird. Eine Gruppenwirkung heißt

(i) *frei*, falls G_x für alle $x \in M$ trivial ist.

(ii) *transitiv*, falls für je zwei $x, y \in M$ ein Element $g \in G$ existiert, sodass $\rho(g, x) = y$ gilt.

(iii) *Wirkung durch Isometrien* bezüglich einer Riemannschen Metrik g_M auf M, falls für jedes Element $g \in G$ die Abbildung $\rho(g, -) \colon M \to M$ eine Isometrie der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g_M) ist.

Der Torus $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times C$ wirkt durch

$$T^2 \times S^3 \to S^3, \quad ((t_1, t_2), (x_1, x_2)) \mapsto (t_1 x_1, t_2 x_2)$$

auf der 3-Sphäre $S^3 \subset \mathbb{C}^2$.

(1) Ist diese Gruppenwirkung transitiv?

(2) Geben Sie die Isotropiegruppen dieser Wirkung an.

(3) Welche Untergruppen von T^2 operieren frei auf S^3?

(4) Bestimmen Sie den Orbitraum der Wirkung.

(5) Wirkt T^2 auf S^3 durch Isometrien?

Aufgabe 3.
Es sei (Z, d) ein metrischer Raum und es bezeichne $\mathcal{C}(Z)$ die Klasse der (nichtleeren) abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von X. Zeigen Sie:

(1) Der Hausdorff-Abstand d_{H}^{Z} definiert eine Metrik auf $\mathcal{C}(Z)$.

(2) Der dadurch gegebene Raum $(\mathcal{C}(Z), d_{\mathrm{H}}^{Z})$ ist kompakt genau dann, wenn (Z, d) kompakt ist.

Aufgabe 4.
Zeigen Sie, dass zwei kompakte metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) genau dann isometrisch sind, wenn für deren Gromov-Hausdorff-Abstand $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) = 0$ gilt.