Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Karlsruher Institut für Technologie

Globale Differentialgeometrie (WS 2018)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1.
Es sei $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Dann heißt

$$\mathrm{StO}_k(n) := \{(v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid v_1, \ldots, v_k \text{ orthonormal}\}$$

die *orthogonale Stiefelsche*. Die Elemente in $\mathrm{StO}_k(n)$ werden als *orthonormale k-Beine in $\mathbb{R}^n$* bezeichnet. Zeigen Sie:

(1) Die orthogonalen Stiefelschen $\mathrm{StO}_k(n)$ sind glatte Mannigfaltigkeiten.

(2) Die orthogonalen Stiefelschen sind diffeomorph zu homogenen Räumen der Form $\mathrm{StO}_k(n) \cong \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k)$.

(3) $\mathrm{StO}_2(n)$ ist diffeomorph zum Sphärenbündel des Tangentialbündels von S^n, d.h. $\mathrm{StO}_2(n) = S(\mathrm{T}\, S^n)$.

Die *reelle Graßmannsche* ist der Raum aller k-dimensionalen Untervektorräume in $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) := \{V \leq \mathbb{R}^n \mid \dim_{\mathbb{R}} V = k\}.$$

Zeigen Sie:

(4) Die reellen Graßmannschen sind homogene Räume der Form

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \cong \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k) \cong \mathrm{SO}(n)/S(\mathrm{SO}(k) \times \mathrm{O}(n-k)).$$

(5) Folgern Sie, dass die reellen Graßmannschen $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten der Dimension $k(n-k)$ sind.

Aufgabe 2.
Für $k, l \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $|k| + |l| \neq 0$ ist durch

$$T_{k,l} := \{\mathrm{diag}(e^{ikt}, e^{ilt}, e^{-i(k+l)t}) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{SU}(3)$ gegeben. Die Quotienten $W_{k,l} := \mathrm{SU}(3)/T_{k,l}$ werden als *Aloff-Wallach Räume* bezeichnet.

Durch $T^2_{k,l} := \{\mathrm{diag}(e^{ikt}, e^{ils}, e^{-i(kt+ls)}) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ ist eine weitere abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{SU}(3)$ gegeben, in der außerdem $T_{k,l}$ enthalten ist.

Definieren Sie S^1-Prinzipalfaserbündel $\mathrm{SU}(3) \to W_{k,l}$ und $W_{k,l} \to \mathrm{SU}(3)/T^2_{k,l}$. Folgern Sie insbesondere, dass $W_{k,l}$ eine Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung besitzt.

Aufgabe 3.
Es seien $W_{k,l}$ die Aloff-Wallach Räume aus der vorigen Aufgabe und es gelte von nun an zudem $kl > 0$.

Weiter sei $\mathfrak{su}(3)$ versehen mit der Metrik $\langle X, Y \rangle_0 = -\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(XY))$, welche sich zu einer biinvarianten Metrik auf SU(3) fortsetzt.

Die Lie-Algebra $\mathfrak{t}_{k,l}$ von $T_{k,l}$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{su}(3)$.

Zeigen Sie, dass nicht-triviale Untervektorräume V_1, V_2 von $\mathfrak{su}(3)$ existieren, die den folgenden Bedingungen genügen:

(i) $\mathfrak{p} := \mathfrak{t}_{k,l}^{\perp}$ lässt sich darstellen als orthogonale direkte Summe $\mathfrak{p} = V_1 \oplus V_2$,

(ii) $[V_1, V_2] \subset V_2$, $[V_i, V_i] \subset V_1 + \mathfrak{t}_{k,l}$ für $i = 1, 2$,

(iii) $\operatorname{Ad}(T_{k,l})V_i \subset V_i$ für $i = 1, 2$,

(iv) Es seien $X = X_1 + X_2, Y = Y_1 + Y_2 \in V_1 \oplus V_2$. Ist $[X, Y] = 0$ und $X \wedge Y \neq 0$ (d.h. X und Y spannen eine Ebene auf), so gilt bereits $[X_1, Y_1] = 0$.

Für $-1 < t < 0$ sei $W_{k,l}$ versehen mit der linksinvarianten Metrik, die durch Fortsetung von

$$\langle X, Y \rangle_t = (1 + t) \langle X_1, Y_1 \rangle_0 + \langle X_2, Y_2 \rangle_0 ,$$

gegeben ist, wobei $X = X_1 + X_2$ und $Y = Y_1 + Y_2$ mit $X_1, Y_1 \in V_1$, $X_2, Y_2 \in V_2$.

(v) Zeigen Sie, dass $(W_{k,l}, g_t)$ strikt positive Schnittkrümmung besitzt.