Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Globale Differentialgeometrie (WS 2018)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1.
Es sei $\pi_P\colon P \to M$ ein Prinzipalfaserbündel mit Strukturgruppe G und es sei $\varrho\colon G \times F \to F$ eine effektive Gruppenwirkung von G auf einer glatten Mannigfaltigkeit F. Man definiert das *zu P assoziierte Faserbündel mit Faser F* als

$$\pi\colon P \times_G F := P \times F/_\sim \to M, \quad [p,x] \mapsto \pi_P(x),$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ vermöge $(p,x) \sim (pg, \varrho(g^{-1},x))$ gegeben ist. Zeigen Sie:

(1) Die Abbildung π ist wohldefiniert.

(2) Bei der Projektion auf den Quotienten $\mathrm{pr}_\varrho\colon P\times F \to P\times_G F,\ (p,x)\mapsto [p,x]$ handelt es sich um ein G-Prinzipalfaserbündel.

(3) Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} P \times F \arrow[r, "pr_P"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_\varrho"] & P \arrow[d, "\pi_P"] \\ P \times_G F \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd},$$

d.h. $\pi_P(p) = \pi(\mathrm{pr}_\varrho(p,x))$ für alle $p \in P$ und $x \in F$.

Aufgabe 2. (1) Zeigen Sie, dass durch die Projektion $\pi\colon\ \mathrm{SO}(n+1) \to \mathrm{SO}(n+1)/\,\mathrm{SO}(n) \cong S^n$ ein Prinzipalfaserbündel mit Strukturgruppe $\mathrm{SO}(n)$ gegeben ist.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Isotropiegruppen der Wirkung der $\mathrm{SO}(n+1)$ auf der S^n und zeigen Sie, dass diese transitiv auf der Einheitssphäre in $\mathrm{T}_p\, S^n$ wirken.

(2) Es sei ρ die Wirkung von $\mathrm{SO}(n)$ auf $\mathbb{R}^n \cong \mathrm{T}_p\, S^n$. Zeigen Sie, dass es sich bei dem assoziierten Faserbündel $\mathrm{SO}(n+1) \times_{\mathrm{SO}(n)} \mathbb{R}^n \to S^n$ mit Faser $\mathbb{R}^n$ um ein Vektorbündel handelt. Zeigen Sie weiterhin, dass der Totalraum dieses Bündels eine Metrik mit nicht-negativer Schnittkrümmung besitzt.

(3) Zeigen Sie, dass dieses Vektorbündel isomorph zum Tangentialbündel $\mathrm{T}\, S^n \to S^n$ ist.

Hinweis: Hierzu genügt es einzusehen, dass die Abbildung $\phi\colon\ \mathrm{SO}(n+1) \times_{\mathrm{SO}(n)} \mathrm{T}_p\, S^n \to \mathrm{T}\, S^n,\ [A,x] \mapsto A_* x$ ein Diffeomorphismus ist, der bei Einschränkung auf die Fasern linear wird.

Aufgabe 3.
Es sei $\varrho\colon G \times M \to M$ eine glatte Gruppenwirkung einer Lie-Gruppe G auf einer glatten

Mannigfaltigkeit M der Dimension n. Dies induziert eine Wirkung auf dem Rahmenbündel $F(M) \to M$ wie folgt:

$$\tilde{\varrho}\colon G \times F(M) \to F(M), \quad (g, (x_1, \dots, x_n)_p) \mapsto (\mathrm{d}\varrho_g(x_1), \dots, \mathrm{d}\varrho_g(x_n))_{\varrho(g,p)}$$

Betrachten Sie erneut die Wirkung von $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ von Übungsblatt 1 Aufgabe 2 auf der $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ gegeben durch

$$\varrho\colon T^2 \times S^3 \to S^3, \quad ((t_1, t_2), (z_1, z_2)) \mapsto (t_1 z_1, t_2 z_2).$$

Es sei daran erinnert, dass diese Wirkung nicht frei ist.

Ist die induzierte Wirkung $\tilde{\varrho}$ auf dem Rahmenbündel $F(S^3)$ frei?