Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Globale Differentialgeometrie (WS 2018)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1.
Es sei $\vartheta : \mathrm{S}^1 \setminus \{1\} \to (0, 2\pi),\ e^{i\vartheta} \mapsto \vartheta$. Zeigen Sie, dass sich $d\vartheta$ auf ganz S^1 zu einer nicht exakten 1-Form fortsetzen lässt.

Aufgabe 2.
Es sei M^n eine zusammenhängende, geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n und für $\alpha, \beta \in \Omega^n(M)$ gelte $\int_M \alpha = \int_M \beta$. Zeigen Sie, dass $\alpha - \beta$ exakt ist.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie:

$$H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k \text{ gerade ist} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Aufgabe 4.
Geben Sie eine Mannigfaltigkeit an, deren de Rham-Kohomologiegruppen nicht alle endlichdimensional sind.

Aufgabe 5.
Es sei M^n eine geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Die Euler-Charakteristik von M wird definiert durch

$$\chi(M) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(M).$$

Zeigen Sie, dass $\chi(M^{2k+1}) = 0$ gilt und $\chi(M^{4k+2})$ gerade ist für alle $k \geq 0$.