Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Globale Differentialgeometrie (WS 2018)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1.
Es sei $E \to M$ ein komplexes Vektorbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit M. Man definiert den *Chern-Charakter von* E als

$$\operatorname{ch}(E) := \operatorname{rk} E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} s_k(c_1(E), \dots, c_n(E)),$$

wobei $c_k(E)$ die k-te Chern-Klasse bezeichnet und die s_k als Polynome durch die Relation

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^k = s_k(\sigma_1(t_1, \dots, t_n), \dots, \sigma_k(t_1, \dots, t_n))$$

definiert sind[1]

Zeigen Sie, dass der Chern-Charakter den folgenden Eigenschaften genügt: Ist $E' \to M$ ein weiteres komplexes Vektorbündel über M, so gilt:

(1) $\operatorname{ch}(E \oplus E') = \operatorname{ch}(E) + \operatorname{ch}(E')$,

(2) $\operatorname{ch}(E \otimes E') = \operatorname{ch}(E) \operatorname{ch}(E')$.

Ist $L \to M$ ein komplexes Geradenbündel, so gilt:

(3) $\operatorname{ch}(L) = \exp(c_1(L))$.

Aufgabe 2.
Es seien $E \to M$ und $E' \to M$ zwei reelle Vektorbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit M. Weiter nehmen wir an, dass $k, l \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $E \oplus \varepsilon^k$ als Vektorbündel isomorph zu $E' \oplus \varepsilon^l$ ist, wobei $\varepsilon^m \to N$ das triviale Vektorbündel vom Rang m über M bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Pontrjagin-Klassen von E und E' übereinstimmen.

[1] D.h. $s_1(c_1, \dots, c_n) = c_1$, $s_2(c_1, \dots, c_n) = c_1^2 - 2c_2$, $s_3(c_1, \dots, c_n) = c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3$, etc.