Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Globale Differentialgeometrie (WS 2018)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1.
Es sei $X_n := \{(x, \frac{k}{n}), (\frac{k}{n}, y) \mid x, y \in [0,1], 0 \leq k \leq n\}$ ein Gitter im Einheitsquadrat. Eine Metrik auf diesem Gitter sei wie folgt gegeben:

$$\mathrm{d}_{X_n}(p,q) := \min\{\mathcal{L}(\gamma) \mid \gamma \text{ Weg in } X, \text{ der } p \text{ und } q \text{ verbindet}\},$$

wobei $\mathcal{L}(\gamma)$ die Länge des Weges γ in der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Folge (X_n) gegen $[0,1]^2$ ausgestattet mit der Manhattan-Metrik, gegeben durch $d_{\mathrm{Man}}(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ für $x, y \in [0,1]^2$, konvergiert.

Aufgabe 2.
Es sei G eine Liegruppe mit einer linksinvarianten Riemannschen Metrik $\langle \, , \rangle$. Zeigen Sie, dass für linksinvariante Vektorfelder X und Y folgendes gilt:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\left([X,Y] - (\mathrm{ad}_X)^* Y - (\mathrm{ad}_Y)^* X\right),$$

wobei $\mathrm{ad}_X Y = [X,Y]$ und $(\mathrm{ad}_X)^*$ die bezüglich $\langle \, , \rangle$ adjungierte Abbildung bezeichnet, i.e. $\langle \mathrm{ad}_X Y, Z\rangle = \langle Y, (\mathrm{ad}_X)^* Z\rangle$.

Aufgabe 3.
Die Matrixgruppe von reellen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

wird als *Heisenberg-Gruppe* bezeichnet. Zeigen Sie, dass für die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der Heisenberg-Gruppe eine Basis X_1, X_2, X_3 existiert, die den Bedingungen $[X_1, X_2] = X_3$ und $[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$ genügt.

Aufgabe 4.
Es sei G die Heisenberg-Gruppe und $\mathfrak{g}$ deren Lie-Algebra mit einer Basis X_1, X_2, X_3 wie in Aufgabe 2. Für eine Konstante $0 < \varepsilon \leq 1$ wird durch

$$g_\varepsilon(X_i, X_j) = \begin{cases} \varepsilon^2 & \text{falls } i = j, \ i \in \{1,2\} \\ \varepsilon^4 & \text{falls } i = j = 3 \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

eine linksinvariante Riemannsche Metrik g_ε auf G definiert. Zeigen Sie, dass $-\frac{3}{4} \leq \sec(M, g_\varepsilon) \leq \frac{1}{4}$ für alle $\varepsilon \in (0,1]$ gilt.