Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Globale Differentialgeometrie (WS 2018)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (1) Es sei X_n die Sphäre S^2, aus der ein Ball vom Radius $\frac{1}{n}$ ausgeschnitten wurde, versehen mit der intrisischen Metrik. Zeigen Sie, dass die Folge (X_n) bezüglich des Gromov-Hausdorff-Abstandes gegen S^2 konvergiert.

(2) Nun sei X_n der Kreis S^1, aus dem ein Segment from Radius $\frac{1}{n}$ ausgeschnitten wurde, versehen mit der intrinsischen Metrik. Zeigen Sie, dass die Folge (X_n) bezüglich des Gromov-Hausdorff-Abstandes nicht gegen S^1 konvergiert.

Aufgabe 2. (1) Es sei (X, d_X) ein Längenraum. Zeigen Sie, dass die Vervollständigung $\overline{X}$ ebenfalls ein Längenraum ist.

(2) Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zeigen Sie, dass auf $X \times Y$ durch

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

eine Metrik gegeben wird.

Zeigen Sie weiterhin: Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) (vollständige) Längenräume, so ist $(X \times Y, d_{X\times Y})$ ein (vollständiger) Längenraum.

(3) Es sei (X, d_X) eine metrischer Raum mit $\operatorname{diam}(X, d) \leq \pi$. Zeigen Sie, dass auf dem *Kegel* $\operatorname{Cone}(X) := X \times [0, \infty)/X \times \{0\}$ durch

$$d_{\operatorname{Cone}(X)}([x, t], [y, s]) := \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts\cos(d_X(x, y))}$$

ein metrischer Raum gegeben ist.

Zeigen, dass es sich um einen (vollständigen) Längenraum handelt, sofern (X, d_X) ein (vollständiger) Längenraum ist.

(4) Es bezeichne $S^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre versehen mit der durch die runde Riemannsche Metrik induzierte Metrik. Zeigen Sie, dass $(\operatorname{Cone}(S^n(1)), d_{\operatorname{Cone}(S^n(1))})$ isometrisch zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Aufgabe 3.
Es sei X ein Alexandrov-Raum mit $K \geq \kappa$ und G eine Gruppe von Isometrien von X, deren Orbiten in X abgeschlossen sind. Beweisen Sie, dass der mit der Quotientenmetrik versehene Orbitraum X/G ein Alexandrov-Raum mit $K \geq \kappa$ ist.

Aufgabe 4.
Benutzen Sie die voranstehende Aufgabe dazu, einen nichtnegativ gekrümmten Alexandrov-Raum zu konstruieren, der keine Mannigfaltigkeit mit Rand ist.