**Fakultät für Mathematik**
**Institut für Algebra und Geometrie**

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Karlsruher Institut für Technologie

## Globale Differentialgeometrie (WS 2018)

# Übungsblatt 7

**Aufgabe 1.**
Eine glatte Abbildung $\pi\colon E^{n+k} \to M^n$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten $E$ und $M$ heißt *Submersion*, falls $f$ surjektiv und $\mathrm{d}\pi_x\colon T_xE \to T_{\pi(x)}M$ surjektiv für alle $x \in E$ ist. Die *Faser* $F_p := \pi^{-1}(p)$ ist in diesem Fall eine Untermannigfaltigkeit von $E$ und Tangentialvektoren, die tangential zur Faser $F_p$ sind, heißen *vertikale Vektoren* und bilden einen Untervektorraum $\mathcal{V}_x \leq \mathrm{T}_x E$ für jedes $x \in F_p$.

Eine Submersion $\pi\colon E^{n+k} \to M^n$ von Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(E, g)$ und $(M, h)$ heißt *Riemannsche Submersion*, falls $\mathrm{d}\pi_x|_{\mathcal{V}_x^\perp}$ für alle $x \in E$ eine Isometrie ist, also die Längen von Vektoren, die orthogonal zur Faser liegen von $\pi$ erhalten wird. Wir notieren $\mathcal{H}_x := \mathcal{V}_x^\perp$ und sprechen von *horizontalen Vektoren*. Insbesondere erhalten wir eine direkte Zerlegung $\mathrm{T}_x E = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x$ mit zugehörigen orthogonalen Projektionsabbildungen $-^{\mathcal{V}}, -^{\mathcal{H}}$.

(1) Es sei $X \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld und durch $\mathrm{d}\pi_x(\overline{X}(x)) = X(\pi(x))$ sein *horizontaler Lift* definiert. Zeigen Sie, dass $\overline{X}$ differenzierbar ist.

(2) Es seien $\nabla^E, \nabla^M$ die Levi-Civita Zusammenhänge der Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(E, g)$ und $(M, h)$. Zeigen Sie, dass für $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ Folgendes gilt:

$$\nabla^E_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\nabla^M_X Y} + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}.$$

(3) Zeigen Sie, dass $[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}(x)$ nur von $\overline{X}(x)$ und $\overline{Y}(x)$ abhängt.

**Aufgabe 2.**
Es sei $\pi\colon (E, g) \to (M, h)$ eine Riemannsche Submersion und es seien $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ glatte Vektorfelder mit horizontalen Lifts $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W} \in \mathcal{X}(E)$ (siehe Übungsblatt 3). Weiter bezeichne $R^E$ resp. $R^M$ den Riemannschen Krümmungstensor von $E$ resp. $M$.

(1) Zeigen Sie die folgende Identität:

$$\begin{aligned} h(R^M(X,Y)Z,W) = g(R^E(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z},\overline{W}) &- \frac{1}{4}g([\overline{X},\overline{Z}]^{\mathcal{V}},[\overline{Y},\overline{W}]^{\mathcal{V}}) \\ &+ \frac{1}{4}g([\overline{Y},\overline{Z}]^{\mathcal{V}},[\overline{X},\overline{W}]^{\mathcal{V}}) - \frac{1}{2}g([\overline{Z},\overline{W}]^{\mathcal{V}},[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}}), \end{aligned}$$

wobei $-^{\mathcal{V}}$ die orthogonale Projektion auf die vertikalen Vektoren bezeichnet.

(2) Sind $X, Y$ orthonormal in $p \in M$, so spannen Sie eine Ebene $\sigma_p \leq \mathrm{T}_p M$ auf, während $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ eine Ebene $\overline{\sigma}_x \leq \mathrm{T}_x E$ für jedes $x \in F_p$ aufspannen. Zeigen Sie, dass für alle $x \in F_p$

$$\sec^M(\sigma_p) = \sec^E(\overline{\sigma}_x) + \frac{3}{4}\left|[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}}_x\right|^2.$$

**Aufgabe 3.**
Es sei $\pi\colon (E,g) \to (M,h)$ eine Riemannsche Submersion. Für $t > 0$ ist die sogenannte *kanonische Variation* $g^t$ von $g$ wie folgt definiert:

$$g^t(X,Y) := t^2 g_{F_{\pi(x)}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) + \pi^* h(X,Y) \text{ für } X, Y \in \mathrm{T}_x M,$$

wobei $g_{F_{\pi(x)}}$ die Einschränkung von $g$ auf die Faser $F_{\pi(x)}$ bezeichne.

(1) Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$ auch $\pi\colon (E,g^t) \to (M,h)$ eine Riemannsche Submersion ist.

(2) Nun seien $E$ und $M$ kompakt. Zeigen Sie, dass für $t \to 0$ die Familie $(E,g^t)$ bezüglich des Gromov-Hausdorff-Abstandes gegen $(M,h)$ konvergiert.