Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Globale Differentialgeometrie (WS 2018)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1.
Betrachten Sie die Lie-Gruppe

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(2) &:= \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid \det A = 1,\ A^* = A^{-1}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \cong S^3. \end{aligned}$$

(1) Zeigen Sie, dass sich die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2) = \mathrm{T}_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{SU}(2)$ darstellen lässt als

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

und durch die Matrizen

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$$

erzeugt wird. Die zugehörigen linksinvarianten Vektorfelder werden fortan ebenfalls mit X_1, X_2, X_3 bezeichnet.

Es sei $\varepsilon > 0$. Auf der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ wird durch Fortsetzung von

$$\langle X_i, X_j \rangle_\varepsilon := \begin{cases} \varepsilon^2 & \text{falls } i = j = 1, \\ 1 & \text{falls } i = j, i \in \{2,3\} \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

ein Skalarprodukt definiert. Dies setzt sich zu einer linksinvarianten Riemannschen Metrik g_ε auf $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$ fort. Die Riemannschen Mannigfaltigkeiten (S^3, g_ε) werden als *Berger-Sphären* bezeichnet.

(2) Vergewissern Sie sich, dass $(\mathrm{SU}(2), g_1)$ isometrisch zur 3-Sphäre mit der Standardmetrik $S^3(1)$ ist.

(3) Zeigen Sie, dass $[X_1, X_2] = 2X_3$, $[X_2, X_3] = 2X_1$, $[X_3, x_1] = 2X_2$, sowie $X_i g_\varepsilon(X_j, X_k) = 0$ gilt und folgern Sie mit Hilfe der Koszul-Formel, dass

$$\nabla_{X_i} X_i = 0,\ \nabla_{X_1} X_2 = (2 - \varepsilon^2) X_3,\ \nabla_{X_2} X_3 = X_1 \text{ und } \nabla_{X_3} X_1 = \varepsilon^2 X_2.$$

(4) Berechnen Sie die Schnittkrümmungen der durch X_i und X_j, für $1 \leq i < j \leq 3$, aufgespannten Ebenen.

(5) Zeigen Sie, dass X_1 tangential an den Bahnen der sogenannten *Hopf-Wirkung*

$$S^1 \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(2), \quad (\theta, A) \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} A$$

liegt und folgern Sie, dass die Berger-Sphären aus der Multiplikation der Standardmetrik auf der S^3 mit ε^2 entlang der Bahnen dieser Wirkung hervorgehen.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass die Berger-Sphären (S^3, g_ε) für $\varepsilon \to 0$ bezüglich des Gromov-Hausdorff-Abstandes gegen $S^2(\frac{1}{2})$ konvergieren.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Abbildung $\mu\colon S^3(1) \subset \mathbb{C} \to S^2(\frac{1}{2}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto (\frac{1}{2}(|w|^2 - |z|^2), z\overline{w})$ eine Riemannsche Submersion ist, die durch eine Isometrie $\overline{\mu}\colon S^3(1)/S^1 \to S^2(\frac{1}{2})$ unter der Hopf-Wirkung faktorisiert, und deren Fasern die Bahnen der Hopf-Wirkung sind.