Karlsruher Institut für Technologie

**Fakultät für Mathematik**
**Institut für Algebra und Geometrie**

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

## Globale Differentialgeometrie (WS 2018)

# Übungsblatt 9

**Aufgabe 1.**
Es sei $\pi\colon (M,\hat{g}) \to (B,g)$ eine Riemannsche Submersion.

(1) Es sei $p \in M$ und $\gamma\colon [0,\varepsilon) \to B$ eine Geodätische in $B$ mit $\gamma(0) = \pi(p)$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Geodätische $\tilde{\gamma}\colon [0,\varepsilon) \to M$ gibt, die ein horizontaler Lift von $\gamma$ ist und $\tilde{\gamma}(0) = p$ erfüllt

(2) Es sei $\hat{\gamma}$ eine Geodätische in $M$ für die $\hat{\gamma}'(0)$ horizontal ist. Zeigen Sie, dass dann $\hat{\gamma}'(t)$ für alle $t$ horizontal und $\gamma := \pi \circ \hat{\gamma}$ eine Geodätische in $B$ ist.

(3) Zeigen Sie, dass $B$ vollständig ist, wenn $M$ vollständig ist. Gilt auch die Umkehrung?

**Aufgabe 2.**
Eine Untermannigfaltigkeit $F$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M,g)$ heißt *totalgeodätisch*, falls jede Geodätische bezüglich der induzierten Metrik in $F$ schon eine Geodätische in $M$ ist.

Es sei $\pi\colon (M,\hat{g}) \to (B,g)$ eine Riemannsche Submersion. Bekanntermaßen zerfällt das Tangentialbündel von $M$ in jedem Punkt $p$ in eine orthogonale Summe $\mathrm{T}_p M = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{V}_p$ für $\mathcal{V}_p = \operatorname{Kern} \pi_*$. Die dadurch gegebenen Untervektorbündel $\mathcal{V}$ und $\mathcal{H}$ werden als *horizontale* bzw. *vertikale Distribution* der Riemannschen Submersion bezeichnet und wir erhalten durch die jeweiligen orthogonalen Projektionen Abbildungen

$$\mathcal{H}\colon \mathcal{X}(M) \to \Gamma(M,\mathcal{H}) \text{ und } \mathcal{V}\colon \mathcal{X}(M) \to \Gamma(M,\mathcal{V}),$$

die einem Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ seine horizontale resp. vertikale Komponente zuordnet.

Nun wird durch

$$T_X Y := \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{V}Y + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{H}Y$$

der sogenannte *$T$-Tensor* der Riemannschen Submersion definiert.

Zeigen Sie, dass $T \equiv 0$ genau dann gilt, wenn die Riemannsche Submersion $\pi$ totalgeodätische Fasern besitzt, i.e. jede Untermannigfaltigkeit $F_p = \pi^{-1}(p)$ totalgeodätisch ist.

**Aufgabe 3.**
Es sei $(B,g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $(G,h)$ eine kompakte Lie-Gruppe versehen mit einer linksinvarianten Metrik $h$. Weiter sei $\pi\colon M \to B$ ein $G$-Prinzipalfaserbündel mit einer zu $\mathcal{V} := \operatorname{Kern} \pi_*$ komplementären Distribution $\mathcal{H}$.[1]

[1] D.h. $\mathcal{H}$ ist eine Wahl eines Untervektorbündels von $\mathrm{T}\,M$, sodass in jedem Punkt $p$ von $M$: $\mathrm{T}_p M = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{V}_p = \mathcal{H}_p \oplus \operatorname{Kern} \pi_{*p}$.

(1) Zeigen Sie, dass es auf $M$ eine eindeutig bestimmte Riemannsche Metrik $\hat{g}$ gibt, sodass $\pi\colon (M, \hat{g}) \to (B, g)$ eine Riemannsche Submersion mit zu $(G, h)$ isometrischen, totalgeodätischen Fasern und horizontaler Distribution $\mathcal{H} = \mathcal{V}^{\perp}$ ist.

   Man bezeichnet $\hat{g} = \hat{g}(g, h, \mathcal{H})$ in diesem Fall als *Zusammenhangsmetrik*.

(2) Es sei $B$ eine kompakte Mannigfaltigkeit und $\pi\colon M \to B$ ein $S^1$-Prinzipalfaserbündel. Zeigen Sie, dass eine Metrik $\hat{g}$ auf $M$ genau dann eine Zusammenhangsmetrik ist, falls sie invariant unter der $S^1$-Wirkung des Bündels ist und jede Faser die gleiche Länge besitzt.