Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fernando Galaz García

Gruppenwirkungen in der Riemannschen Geometrie (WS 2015 / 2016)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Sei M eine kompakte, zusammenhängende riemannsche G-Mannigfaltigkeit. Nehmen Sie an, dass die G-Aktion Kohomogenität 1 hat und dass $M/G = [-1,+1]$. Zeigen Sie das Folgende:

(1) Die Kohomogenität 1 G-Aktion bestimmt ein Gruppendiagramm

$$\begin{tikzcd} & G & \\ K_- \arrow[ur, "j_-"] & & K_+ \arrow[ul, "j_+"'] \\ & H \arrow[ul, "i_-"] \arrow[ur, "i_+"'] & \end{tikzcd}$$

wobei $i_\pm$ and $j_\pm$ die Inklusionsabbildungen sind, $K_\pm$ die Isotropiegruppen der Orbits $\pi^{-1}(\pm 1)$ sind und H die prinzipale Isotropiegruppe der Aktion ist. Man bezeichnet dieses Diagramm mit (G,H,K_-,K_+).

(2) Sei (G,H,K_-,K_+) ein Gruppendiagramm, wobei $K_\pm/H$ Sphären sind. Dann existiert eine riemannsche Kohomogenität 1 G-Mannigfaltikeit mit diesem Gruppendiagramm.

(3) Die Gruppen $(T^2,\{e\},T^1,T^1)$ bestimmen $\mathbb{S}^3$ und $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ als Kohomogenität 1 Mannigfaltigkeiten. Deshalb spielen die Inklusionssabbildungen eine wichtige Rolle.

Aufgabe 2

Geben Sie zwei unterschliedliche Gruppendiagramme für Kohomogenität 1 Wirkungen auf $\mathbb{S}^3$.

Aufgabe 3

Können Sie noch andere Maße definieren, um die Größe einer isometrischen G-Aktion auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit zu messen?