FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

13. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei S_m die Permutationsgruppe von m Elementen.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Permutationsgruppe S_{n+1} durch n Transpositionen erzeugt ist, d.h., es existieren Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_n \in S_{n+1}$, so dass jedes $\pi \in S_n$ ein endliches Produkt der Elemente $\tau_1, \dots, \tau_n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es für jede ganze Zahl $n \geq 2$ einen Normalteiler N von S_n mit $|N| = \frac{n!}{2}$ gibt.

Aufgabe 2.
Es sei R ein kommutativer Ring. Die Definition auf Seite 164 im Skript kann wortwörtlich übernommen werden, um auch die Determinante einer Matrix aus $R^{n \times n}$ zu erklären. Es seien jetzt $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ ein Körper und $R := \mathbb{K}[X]$ der Ring der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$. Betrachten Sie die Matrix $A_n \in R^{n \times n}$, definiert durch

$$A_n := \begin{pmatrix} 1+X^2 & X & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ X & 1+X^2 & X & 0 & & & \vdots \\ 0 & X & 1+X^2 & X & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & X & 1+X^2 & X & 0 \\ \vdots & & & 0 & X & 1+X^2 & X \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & X & 1+X^2 \end{pmatrix},$$

und bestimmen Sie $\det(A_n)$ in Abhängigkeit von n.

Aufgabe 3.
Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix. Definieren Sie die Spur von A als $\text{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Gleichung $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$ erfüllt ist.

(b) Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\Psi \in \text{End}(V)$ und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V. Definieren Sie $\text{Spur}(\Psi) := \text{Spur}(A_\Psi)$, wobei A_Ψ die Abbildungsmatrix von Ψ bzgl. $\mathcal{B}$ ist. Zeigen Sie, dass der Wert von $\text{Spur}(\Psi)$ nicht von der Wahl der Basis von V abhängt.

(c) Es sei $\Psi \in \text{End}(\mathbb{K}^n)$ und es bezeichne $(a_1|a_2|...|a_n)$ die (n,n)-Matrix mit den Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \det(a_1|...|a_{j-1}|\Psi(a_j)|a_{j+1}|...|a_n) = \text{Spur}(\Psi) \cdot \det(a_1|...|a_n) \, .$$

Aufgabe 4.
Es sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $B := (t^{j-k} a_{jk})$. Berechnen Sie die Determinante von B in Abhängigkeit von $\det A$ und t.

Abgabe bis Montag, den 7. Februar 2011, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2.