FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

Aufgabenvorschläge für das 2. Tutorium

Vorschlag 1.
Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen $\sim$ in der jeweiligen Menge A Äquivalenzrelationen sind.

(a) $A := \mathbb{N}$, $m \sim n \;:\Longleftrightarrow\; m$ ist durch n teilbar, d.h. $\exists\, k \in \mathbb{N} : m = n \cdot k$.

(b) $A := \mathbb{R}$, $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; |x - y| < 1$.

(c) $A := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) :\Longleftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$.

Vorschlag 2.
Geben Sie jeweils eine Menge M und eine Relation R auf M an, so dass gilt:

(a) R ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.

(b) R ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch.

(c) R ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv.

Vorschlag 3.
Es sei A eine endliche Menge und $\circ$ eine assoziative Verknüpfung auf A. Zeigen Sie: $(A, \circ)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn jedes Element von A in jeder Zeile und jeder Spalte der Verknüpfungstafel genau einmal vorkommt.

Vorschlag 4.
Es sei A eine 3-elementige Menge. Geben Sie (mit Hilfe von Verknüpfungstafeln) alle Verknüpfungen $\circ$ an, so dass $(A, \circ)$ eine Gruppe ist.

Vorschlag 5.
Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind mit der gewöhnlichen Addition auf $\mathbb{R}^2$ Gruppen ?

(a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy \geq 0\}$.

(b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 2xy\}$.

(c) $C := B \cup \mathbb{Z}^2$.

Vorschlag 6.
Sei $(A, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Man zeige:

(a) Für alle $x, y \in A$ gilt $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.

(b) Gilt für jedes Element $x \in A$ die Gleichung

$$x^2 := x \circ x = e,$$

so ist A abelsch.