Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

Aufgabenvorschläge für das 3. Tutorium

Vorschlag 1.

(a) Jede Gruppe mit 3 Elementen ist abelsch. Jede Gruppe mit 4 Elementen ist abelsch.

(b) Es seien G, H zwei Gruppen mit jeweils 101 Elementen. Dann sind G und H isomorph, d.h., es gibt einen bijektiven Homomorphismus $\psi : G \to H$.

Vorschlag 2.
Gegeben seien die Permutationen

$$\pi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S_7.$$

(a) Man berechne $\pi_1 \circ \pi_2$ und sein Inverses.

(b) Man zeige: $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1} \circ \pi_1^{-1}$.

(c) Man berechne Permutationen $\pi_3,\ \pi_4$ mit $\pi_1 \circ \pi_3 = \pi_2$ und mit $\pi_4 \circ \pi_1 = \pi_2$.

(d) Man berechne die Ordnung von π_1 und π_2.

Vorschlag 3.
Seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und $f : G \to G$ durch $f(g) := g^{-1}$ gegeben. Man zeige: f ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn $(G, \circ)$ abelsch ist.

Vorschlag 4.
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $M \subset G$ eine Teilmenge. Dann sind die beiden Teilmengen

$$N(M) := \{g \in G \mid g \circ M \circ g^{-1} = M\}$$

$$C(M) := \{g \in G \mid g \circ y \circ g^{-1} = y\ ,\ \forall\, y \in M\}$$

Untergruppen von G.

Vorschlag 5.
Welche der folgenden Abbildungen sind Homo-, Iso- bzw. Automorphismen? (Die Addition auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist hier komponentenweise definiert, wie in der Zusatzaufgabe von Blatt 2.)

(a) $\psi_1 : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}, +),\ \psi_1(x, y) = x - y$.

(b) $\psi_2 : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}, +),\ \psi_2(x, y) = x^2 - y$.

(c) $\psi_3 : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}^2, +),\ \psi_3(x, y) = (y, 0)$.

(d) $\psi_4 : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}^2, +),\ \psi_4(x, y) = (y, x - \sin(y))$.

Bestimmen Sie gegebenenfalls jeweils den Kern von ψ_j.