Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Arbeitsgruppe Differentialgeometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

Aufgabenvorschläge für das 4. Tutorium

Vorschlag 1.
Seien $(A, \circ)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e und

$$T := \{a \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n = e\}.$$

Man zeige, dass T eine Untergruppe von $(A, \circ)$ ist.
Zusatzfrage: Ist T auch für jede nicht abelsche Gruppe eine Untergruppe?

Vorschlag 2.
Seien $(A, \circ)$ und $(B, *)$ Gruppen und $\varphi : A \to B$ ein Gruppenhomomorphismus von A nach B. Man zeige:

(a) Ist U eine Untergruppe von A, so ist das Bild $\varphi(U)$ von U eine Untergruppe von B.

(b) Ist V eine Untergruppe von B, so ist das Urbild $\varphi^{-1}(V)$ von V eine Untergruppe von A.

Vorschlag 3.
Man gebe einen Gruppenisomorphismus von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ nach $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$ an, wobei $\circ$ wie in Aufgabe 3 des 3. Übungsblattes gewählt sei.

Vorschlag 4.
Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Man zeige:

(a) Die Menge $m\mathbb{Z} := \{mz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ist mit der üblichen Addition von Zahlen eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

(b) Die Menge $Z_m := \{0, 1, \ldots, m-1\}$ der möglichen Reste bei der Division durch m ist mit der Addition modulo m zwar eine Gruppe aber keine Untergruppe von $\mathbb{Z}$.

Vorschlag 5.
Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ habe Dezimaldarstellung $n = \sum_{i=0}^{k} a_i\, 10^i$. Man zeige:

(a) n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn $\sum_{i=0}^{k} a_i$ durch 3 teilbar ist.

(b) n ist genau dann durch 11 teilbar, wenn $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_i$ durch 11 teilbar ist.

Vorschlag 6.
Man zeige anhand der Verknüpfungstafeln, dass $\mathbb{F}_3$ (bis auf Isomorphie) der einzige Körper mit 3 Elementen ist.