Karlsruher Institut für Technologie
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

Aufgabenvorschläge für das 5. Tutorium

Vorschlag 1.
Versehen Sie die Menge $M = \mathbb{R}^{n\times n}$ aller quadratischen (n,n)-Matrizen mit den folgenden Verknüpfungen:

(a) $\circ : M \times M \to M, \quad A \circ B := \frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A)$. Hierbei bezeichnet "$\cdot$" die Matrizenmultiplikation.

(b) $\bullet : M \times M \to M, \quad A \bullet B := A \cdot B - B \cdot A$.

Untersuchen Sie die beiden Verknüpfungen auf Assoziativität.
Die erste Verknüpfung definiert auf M die Struktur einer sog. Jordan-Algebra und die zweite Verknüpfung definiert auf M die Struktur einer Liealgebra.

Vorschlag 2.
Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 := 1 - i,\ z_2 := 2 + 3i$.

(a) Berechnen Sie:

(i) $z_1 + z_2$,
(ii) $z_1 \cdot z_2^2$,
(iii) $|\overline{z_1 \cdot z_2}|$,
(iv) z_2^{-1}.

(b) Stellen Sie die komplexe Zahl $\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}$ in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

(c) Skizzieren Sie folgende Mengen in der Gaußschen Zahlenebene

(i) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$,
(ii) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \leq 5\}$,
(iii) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid z = i\bar{z}\}$.
(iv) $M_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(iz) > 0\}$

Vorschlag 3.
Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und A, B die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 2} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}\ .$$

Bestimmen Sie, falls möglich, die Produkte $AA,\ AB,\ BA,\ BB$ und A^TA in den folgenden Fällen:

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$.

Vorschlag 4.

(a) Es seien p eine Primzahl, $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ der Körper mit p Elementen und

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2} .$$

Bestimmen Sie, falls möglich, die zu A inverse Matrix A^{-1} durch das Lösen der Gleichung $A \cdot Y = E_2$ für ein $Y \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Welche Bedingung muss die Matrix A erfüllen, damit A^{-1} existiert?

(b) Finden Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ mit $A \cdot B \neq B \cdot A$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ (der Körper mit zwei Elementen).

Vorschlag 5.

(a) Berechnen Sie die Matrix $f(A)$ für das Polynom $f := X^3 - 2X + 3$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(b) Bestimmen Sie alle Matrizen $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die $X^2 = E_2$ erfüllen.