Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

Aufgabenvorschläge für das 8. Tutorium

Vorschlag 1.
Im $\mathbb{K}$-Vektorraum V seien die linear unabhängigen Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ sowie die linear unabhängigen Vektoren $x_{k+1}, \ldots, x_m$ gegeben. Man zeige:

$$x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m \text{ l.u. } \Longleftrightarrow [x_1, \ldots, x_k] \cap [x_{k+1}, \ldots, x_m] = \{0\}.$$

Vorschlag 2.
Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $x_1, \ldots, x_n \in V$. Gelten folgende Aussagen?

(a) $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ linear abhängig $\Longrightarrow$ Jeder Vektor aus A lässt sich als Linearkombination der übrigen Vektoren aus A darstellen.

(b) $\exists\, x \in V$ mit eindeutiger Darst. als Linearkomb. von $x_1, \ldots, x_n \Longrightarrow x_1, \ldots x_n$ l.u.

(c) $x_1, \ldots, x_n$ l.u. , $u \in V \Longrightarrow x_1 + u, \ldots, x_n + u$ l.u.

Vorschlag 3.
Man prüfe, ob die Menge

$$\{X - 1, X^2 - X + 2, X^2 - 1, X^4 - X^2 + 1\} \subset \mathbb{R}[X]$$

linear unabhängig ist.

Vorschlag 4.
Es seien $x,\ y,\ z$ drei Vektoren eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Man zeige:

(a) $x - y$, $y - z$ und $z - x$ sind linear abhängig.

(b) Falls $1 + 1 \neq 0$ in $\mathbb{K}$ gilt, so sind $x,\ y,\ z$ genau dann linear unabhängig, wenn $x + y,\ y + z,\ z + x$ linear unabhängig sind.

Vorschlag 5.
Man bestimme die Dimension und eine Basis von

$$U := [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}] \subset \mathbb{R}^3,$$

und ergänze diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

Vorschlag 6.
Man bestimme Basis und Dimension folgender Untervektorräume U des $\mathbb{K}$-Vektorraums V.

(a) $V = \mathbb{R}^3,\ \mathbb{K} = \mathbb{R},\ U = \{(x_1, x_2, x_3) \in V \mid 2x_1 - x_2 = x_3\}$

(b) $V = (\mathbb{Z}_3)^3,\ \mathbb{K} = \mathbb{Z}_3,\ U = \{(x_1, x_2, x_3) \in V \mid 2x_1 - x_2 = x_3\}$

(c) $V = \mathbb{R}[X],\ \mathbb{K} = \mathbb{R},\ U = [1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X - X^2, 1 - X + X^2, 1 - X - X^2]$

(d) $V = \{f : \{1, \ldots, 9\} \to \mathbb{R}\},\ \mathbb{K} = \mathbb{R},\ U = V$