Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

Aufgabenvorschläge für das 9. Tutorium

Vorschlag 1.
Es sei $M := \{p_1, \ldots, p_k\} \subseteq \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. Weiterhin gelte:

$$\operatorname{Grad} p_i \neq \operatorname{Grad} p_j \text{ für } i \neq j.$$

Ist M dann immer eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}[X]$?

Vorschlag 2.
Man bestimme durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen den Rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \alpha \\ -\alpha & 0 & 1-\alpha & 0 \\ -1 & \alpha & -1 & \alpha^2 \\ 2 & -(1+\alpha) & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{C}$. Welche Dimension hat der Lösungsraum der Gleichung $Ax = 0$?

Aufgabe 3.
Es seien U und W Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V und $x, y \in V$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $[x]_\sim = [0]_\sim$ in $V/U \iff x \in U \iff x + U = U \iff x + U$ ist Untervektorraum.

(b) $x + U \subseteq y + W \iff U \subseteq y - x + W$

(c) $(x + U) \cap (y + W) \neq \emptyset \iff x - y \in U + W$

Vorschlag 4.

(a) Es seien V ein Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume mit $V = U_1 \oplus U_2$. Weiter seien B_1, B_2 Basen von U_1 bzw. U_2. Zeigen Sie, dass $B := B_1 \cup B_2$ eine Basis von V ist.

(b) Es sei B eine Basis des Vektorraums V mit $B = B_1 \cup B_2$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $V = [B_1] \oplus [B_2]$ gilt.