FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
apl. Prof. Dr. D. Hug
Dr. habil. G. Fels, Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (WS 2010/2011)

Aufgabenvorschläge für das 10. Tutorium

Vorschlag 1.
Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Phi : V \to V$ linear. Zeigen Sie:
Gilt $\Phi(U) \subset U$ für alle Untervektorräume $U \subset V$, so existiert ein $c \in \mathbb{K}$ mit $\Phi = c \cdot \mathrm{id}_V$.

Vorschlag 2.
Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\Phi : V \to W$ linear, $A \subset V$ und U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) $\Phi([A]) = [\Phi(A)]$

(b) $\Phi(U_1 + U_2) = \Phi(U_1) + \Phi(U_2)$
Falls die Summe $U_1 + U_2$ direkt ist, ist dann auch die Summe auf der rechten Seite direkt?

Vorschlag 3.
Im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit $\Phi(x_1) = y_1$ und $\Phi(x_2) = y_2$.

(b) Berechnen Sie $\Phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ sowie $\mathrm{Kern}\,\Phi$ und $\mathrm{Bild}\,\Phi$.

(c) Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit $\Psi(y_1) = x_1$, $\Psi(y_2) = x_2$, $\Psi(y_3) = 0$ und bestimmen Sie $\mathrm{Kern}\,\Psi$ und $\mathrm{Bild}\,\Psi$.

Vorschlag 4.
Die Linearform $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $\Phi(x, y) = -2x - 3y$ definiert. Zeichnen Sie $\mathrm{Kern}\,\Phi$ und $K_a := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(z) = a\}$ für $a \in \{6, 12, -6\}$ als Mengen im $\mathbb{R}^2$.

Vorschlag 5.
Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter seien $v_1, \ldots, v_p \in V$ gegeben und

$$w_i = \Phi(v_i), \quad i = 1, \ldots, p,$$

ihre Bildvektoren in W. Man zeige:

(a) Sind $w_1, \ldots, w_p$ linear unabhängig, dann auch $v_1, \ldots, v_p$.

(b) Ist Φ injektiv und sind $v_1, \ldots, v_p$ linear unabhängig, so sind auch $w_1, \ldots, w_p$ linear unabhängig.

Gilt die Implikation in (b) auch, wenn Φ nicht als injektiv vorausgesetzt wird ? (Beweis oder Gegenbeispiel!)